

**Akademia Ekonomiczna
im. Oskara Langego we Wrocławiu**
Wydział Zarządzania i Informatyki

Krzysztof Piontek

**MODELOWANIE I PROGNOZOWANIE
ZMIENNOŚCI INSTRUMENTÓW
FINANSOWYCH**

rozprawa doktorska

Promotor: **prof. dr hab. Krzysztof Jajuga**

Wrocław, 2002

Spis treści

Wstęp	4
1. Ryzyko na rynkach finansowych	9
1.1. Definicje i podział ryzyka	9
1.2. Ryzyko finansowe	14
1.3. Podstawowe elementy procesu zarządzania ryzykiem	19
1.4. Miary ryzyka rynkowego	25
1.4.1. Miary zmienności	26
1.4.2. Miary zagrożenia	32
1.4.3. Miary wrażliwości	36
1.5. Znaczenie zmienności w nowoczesnej teorii finansów	36
1.5.1. Zmienność a klasyczna teoria portfela	37
1.5.2. Zmienność a pomiar ryzyka metodą <i>VaR</i>	39
1.5.3. Zmienność a modele wyceny opcji	42
2. Modelowanie cen i zmienności	45
2.1. Modelowanie - podstawowe koncepcje	45
2.2. Procesy stochastyczne	51
2.3. Modele czasu ciągłego - procesy Itô	53
2.4. Modele z czasem dyskretnym	66
2.5. Modelowanie stóp zwrotu akcji, towarów i walut	72
2.6. Empiryczne własności szeregów stóp zwrotu	74
2.7. Uogólnienia w zakresie z_t	77
2.7.1. Rozkłady o jednostkowej wariancji	80
2.7.2. Rozkłady skośne	87
2.7.3. Inne propozycje w zakresie rozkładów stóp zwrotu	91
2.7.4. Niezależność z_t	109

2.8.	Uogólnienia w zakresie μ	111
2.8.1.	Procesy <i>ARMA</i>	115
2.8.2.	Procesy zintegrowane <i>ARIMA</i> i <i>ARFIMA</i>	118
2.9.	Uogólnienia w zakresie σ	123
2.9.1.	Modele z czasem ciągłym	125
2.9.2.	Modele zmienności deterministycznej	127
2.9.3.	Modele zmienności stochastycznej	152
2.10.	Modelowanie szeregów natychmiastowych stóp procentowych	155
3.	Prognozowanie zmienności	164
3.1.	Podstawowe pojęcia	165
3.2.	Metody oparte na analizie szeregów czasowych	170
3.2.1.	Modele ze stałym parametrem zmienności w okresie	171
3.2.2.	Metody oparte na modelach <i>GARCH</i>	176
3.3.	Metody oparte na oczekiwaniach rynku	184
3.3.1.	Zmienność implikowana dla pojedynczej opcji	185
3.3.2.	Łączna zmienność implikowana dla klasy opcji	189
3.4.	Oceny prognoz zmienności	198
4.	Modele zmienności w wybranych zagadnieniach finansowych - badania empiryczne	202
4.1.	Modelowanie zmienności	204
4.2.	Prognozy zmienności - modele szeregów czasowych	219
4.3.	Prognozy zmienności - zmienność implikowana	227
4.4.	Szacowanie miary VaR	231
4.5.	Wycena opcji w modelu uwzględniającym efekt <i>AR-GARCH</i>	237
	Zakończenie	246
	Literatura	269

Wstęp

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat doszło na rynkach finansowych do szeregu zmian. Znaczny wzrost ryzyka spowodował, iż stało się ono jednym z najważniejszych pojęć współczesnych finansów. Zaowocowało to dynamicznym rozwojem teorii rynków finansowych. Rozwinęła się nowa dziedzina wiedzy, a mianowicie zarządzanie ryzykiem.

Spośród różnych rodzajów ryzyka występującego na rynkach finansowych, najwięcej uwagi poświęcono, jak do tej pory, ryzyku rynkowemu, związanemu ze zmianami cen instrumentów finansowych oraz ryzyku kredytowemu, związanemu z możliwością niedotrzymania warunków kontaktu przez drugą stronę transakcji. Zarządzanie tymi dwoma rodzajami ryzyka stało się nie tylko elementem podniesienia ekonomicznej efektywności, ale także coraz częściej elementem decydującym w ogóle o egzystencji podmiotu.

Cechą charakterystyczną nowoczesnego zarządzania tymi rodzajami ryzyka jest wykorzystywanie coraz bardziej wyrafinowanych instrumentów pochodnych oraz metod matematycznych, w tym przede wszystkim teorii procesów stochastycznych. Techniki wykorzystywane w takim zarządzaniu ryzykiem należą do bardziej ogólnego pojęcia - inżynierii finansowej.

W niniejszej pracy rozpatrywane będą wyłącznie elementy związane z zarządzaniem ryzykiem rynkowym. Zgodnie z przyjętymi ogólnie koncepcjami, w ramach procesu zarządzania ryzykiem wymienia się cztery etapy: identyfikację ryzyka, pomiar ryzyka, sterowanie poziomem ryzyka oraz kontrolę. Sygnalizowane metody matematyczne, będące tematem niniejszej pracy, wykorzystywane będą podczas pomiaru ryzyka.

Naturalnym dążeniem każdego decydenta, który poprzez swoje decyzje podejmuje ryzyko, powinna być chęć zapewnienia sobie możliwości analizy konsekwencji podjętych działań poprzez wyznaczenia odpowiedniej miary ryzyka. Rozpatrując całą gamę dostępnych instrumentów, trudno wskazać jedną koncepcję pomiaru ryzyka. Dla po-

szczególnych grup instrumentów finansowych istnieją odpowiednio zdefiniowane tradycyjne miary ryzyka.

W odniesieniu do analizowanych w pracy instrumentów (akcji, walut, towarów), najczęściej wykorzystuje się miary zmienności.

Zmienność instrumentów finansowych stała się jednym z ważniejszych pojęć współczesnych finansów. Ogólnie można powiedzieć, że zmienność jest miarą niepewności co do przyszłych zmian ceny instrumentu finansowego (co do stopy zwrotu z danego instrumentu). Jeśli wzrasta zmienność, rośnie prawdopodobieństwo, że dany instrument finansowy znacznie zmieni swoją cenę w przyszłości. Może być to zarówno korzystna, jak i niekorzystna zmiana z punktu widzenia posiadacza takiego instrumentu.

Najbardziej znaną i preferowaną miarą zmienności pozostaje odchylenie standardowe stóp zwrotu.

Znaczenie zmienności w teorii finansów jest fundamentalne. Wystarczy wspomnieć o klasycznej teorii portfela zaproponowanej przez Markowitza, modelach wyceny opcji, czy zalecanej ostatnio koncepcji pomiaru ryzyka metodą *Value at Risk*.

Zainteresowanie zmiennością obserwuje się zarówno na płaszczyźnie teoretycznej, jak i praktycznej, gdyż prawidłowe oszacowanie (przyszłego) parametru zmienności umożliwia zmniejszenie ryzyka inwestycji lub osiągnięcie większych dochodów.

U podstaw rozważań o zmienności instrumentów finansowych znajduje się dyskusja o dynamicznych modelach opisujących cenę instrumentu finansowego. Ceny lub stopy zwrotu opisuje się za pomocą teorii procesów stochastycznych z czasem ciągłym lub dyskretnym. Badania empiryczne stóp zwrotu, dla niektórych instrumentów, wykazały występowanie w empirycznych szeregach stóp zwrotu efektów: grubych ogonów oraz skośności rozkładów, skupiania zmienności (zmiennej w czasie wariancji), autokorelacji stóp zwrotu oraz tzw. „efektu dźwigni”, czyli asymetrycznej reakcji na napływające dobre i złe informacje. Do prawidłowego pomiaru ryzyka niezbędne staje się konstruowanie modeli, pozwalających uwzględnić wymienione efekty. Uzyskuje się to poprzez uogólnienie najprostszego modelu stóp zwrotu, zakładającego, iż kolejne obserwacje pochodzą z niezależnych rozkładów normalnych o stałych w czasie parametrach. Wprowadza się więc modele z warunkową wartością oczekiwaną oraz z warunkową wariancją, w których dopuszcza się, iż reszty modelu mogą posiadać rozkład o grubszych ogonach niż rozkład normalny.

Z punktu widzenia podejmowania decyzji inwestycyjnych najważniejszą rolę odgrywają prognozy zmienności. Inwestor zainteresowany jest oszacowaniem przyszłego poziomu zmienności. Teoria i praktyka wypracowały różne metody prognozowania

zmienności; od metod bardzo prostych wykorzystujących koncepcję procesów o stałym parametrze zmienności, po modele stochastycznej zmienności oraz zmienności implikowanej. Brak jest zgodności, która z wymienionych metod pozwala na najlepsze oszacowanie przyszłego poziomu zmienności. Każdego roku proponowane są nowe koncepcje prognozowania zmienności oraz prezentowane są wyniki nowych badań empirycznych.

Drugim etapem procesu zarządzania ryzykiem, w którym wykorzystuje się silnie metody matematyczne, jest etap sterowania ryzykiem. Znajomość przyszłego parametru zmienności niezbędna jest w procedurze dywersyfikacji ryzyka opartej na metodach analizy portfelowej oraz we wszelkich metodach wykorzystujących opcje wystawione na poszczególne instrumenty bazowe.

Celem pracy jest przegląd nowoczesnych metod modelowania zmienności stóp zwrotu oraz prognozowania parametru zmienności instrumentów finansowych, a także wykorzystania tych metod w pomiarze ryzyka rynkowego. Teoretyczne rozważania dotyczące modelowania i prognozowania zmienności uzupełnione zostaną o wyniki odpowiednich badań empirycznych. W ramach wymienionych zagadnień rozważane są następujące cele cząstkowe:

- przegląd wykorzystywanych postaci rozkładów reszt modelu znajdujących zastosowanie w zagadnieniu modelowania zmienności instrumentów finansowych,
- przegląd modeli warunkowej wartości oczekiwanej znajdujących zastosowanie w zagadnieniu modelowania zmienności,
- przegląd modeli warunkowej wariancji,
- przegląd technik prognozowania parametru zmienności na podstawie modeli szeregów czasowych,
- przegląd technik prognozowania parametru zmienności na podstawie oczekiwań rynku,
- przedstawienie wyników badań empirycznych dotyczących modelowania i prognozowania zmienności rzeczywistych szeregów stóp zwrotu z wybranych instrumentów finansowych.

Wkładem własnym autora jest przegląd wiedzy z zakresu modelowania oraz prognozowania zmienności instrumentów finansowych nie będących instrumentami opartymi o stopy procentowe. Wkładem własnym jest również weryfikacja niektórych zaprezentowanych rozwiązań dla danych empirycznych pochodzących przede wszystkim

z rynku polskiego.

Praca podzielona została na cztery rozdziały.

W rozdziale pierwszym przedstawiono podstawowe wiadomości o ryzyku finansowym, ze szczególnym uwzględnieniem ryzyka rynkowego i elementów procesu zarządzania ryzykiem. Zaprezentowano możliwe miary ryzyka rynkowego. Główny nacisk położony został na miary zmienności. Przedstawiono różne koncepcje pomiaru zmienności. Rozdział kończy prezentacja znaczenia zmienności instrumentów finansowych w nowoczesnej teorii finansów. Rozważano zagadnienia związane z analizą portfelową, pomiarem ryzyka metodą *VaR* oraz wyceną opcji.

W rozdziale drugim przedstawiono niektóre metody modelowania finansowych szeregów czasowych. Rozważania rozpoczęto od analizy przypadku dla czasu ciągłego. Przedstawiono podstawowe wiadomości o procesach Itô. Główny nacisk położony został jednak na modele z czasem dyskretnym. Prezentowane zagadnienia podzielono na trzy części. Część pierwsza obejmowała możliwe do wykorzystania w procesie modelowania rozkłady gęstości prawdopodobieństwa reszt modeli. W części drugiej przedstawiono techniki umożliwiające modelowanie warunkowej wartości oczekiwanej procesów. Część ostatnia poświęcona została modelom wariancji stóp zwrotu. Główny nacisk położony został na modelowanie zmienności za pomocą modeli klasy *GARCH*, które od wprowadzenia ich w 1986 roku przez Bollersleva zdobyły znaczną popularność. Umożliwiają one modelowanie, dostrzeganych w badaniach empirycznych, charakterystycznych właściwości szeregów i rozkładów stóp zwrotu. Przedstawiono różne klasy modeli *GARCH*, a także metoda estymacji ich parametrów.

Rozdział trzeci pracy zawiera syntetyczne zestawienie najpopularniejszych metod prognozowania zmienności. Zaprezentowane zostały: prognozy oparte na szeregach czasowych oraz prognozy oparte na oczekiwaniach rynku. W ramach technik prognozowania zmienności na podstawie szeregów czasowych zaprezentowano metody zakładające stałość zmienności, w okresie dla którego dokonywana jest prognoza oraz prognozy oparte na modelach klasy *GARCH* uwzględniających efekt powrotu do średniej. Oprócz metod bazujących na danych historycznych zaprezentowano metodę prognozowania zmienności na podstawie zmienności implikowanej, czyli oczekiwań uczestników rynku przy założeniu efektywności rynku i poprawności modelu wyceny opcji. Rozważania dotyczyły również wyznaczania łącznego parametru zmienności implikowanej wyznaczanej na podstawie zbioru opcji wystawionych na ten sam instrument

bazowy. Przedstawiono również techniki oceny prognoz zmienności.

Rozdział czwarty poświęcony został praktyce rynków kapitałowych. Przedstawione zostały empiryczne wyniki dopasowania różnych modeli stóp zwrotu z warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją do szeregów stóp zwrotu z indeksu WIG, kursu dolara oraz ceny miedzi.

W dalszej części rozdziału zaprezentowano techniki prognozowania zmienności na podstawie zarówno technik opartych na analizie szeregów czasowych, jak i na oczekiwaniach rynku. Dla obu grup technik prognozowano zmienność stóp zwrotu w kolejnych miesiącach kalendarzowych. Celem badań nad możliwością prognozowania zmienności jest odpowiedź na pytanie, która z prezentowanych technik, sprawdzała się najlepiej do tej pory i powinna być wykorzystywana w przyszłości. Uzyskiwane na podstawie tej techniki prognozy mogą następnie być wykorzystane w zagadnieniach związanych z analizą portfelową, wyceną opcji, szacowaniem miary *VaR*.

Wykazana została również przydatność modeli omawianych w rozdziale drugim podczas pomiaru jednodniowej wartości zagrożonej (*VaR*) dla indeksu WIG.

W ostatniej części rozdziału przedstawiono model wyceny europejskiej opcji kupna na instrument bazowy, którego szereg stóp zwrotu charakteryzuje się autokorelacją, efektem *GARCH* oraz „efektem dźwigni”.

Rozdział 1.

Ryzyko na rynkach finansowych

1.1. Definicje i podział ryzyka

Działanie w warunkach ryzyka jest nieodłączną cechą każdej działalności inwestycyjnej. Wynika ono z faktu podejmowania decyzji dotyczących nieznanej przyszłości. W zależności od prowadzonej działalności możemy mieć do czynienia z różnymi rodzajami ryzyka.

Pomimo, iż zagadnieniami związanymi z ryzykiem ludzkość interesowała się już od kilku stuleci (por. Bernstein (1997)), badania uległy sformalizowaniu praktycznie dopiero w XX wieku. Pojęcie ryzyka zrobiło w ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat karierę również we współczesnej ekonomii, a przede wszystkim w ubezpieczeniach oraz finansach, gdzie jak nigdzie indziej zaobserwować można rozkwit metod związanych z teoretycznymi i praktycznymi aspektami ryzyka.

Ryzyko jest pojęciem bardzo wieloznacznym i złożonym. Powstało bardzo wiele, czasami dość rozbieżnych, definicji pojęcia ryzyka na płaszczyźnie wielu nauk. Wśród podstawowych nauk zajmujących się ryzykiem należy wymienić: rachunek prawdopodobieństwa, statystykę, teorię gier, ekonomię, psychologię oraz prawo. W związku z rozwojem metod matematycznych, coraz większy wkład w teorię ryzyka wnosi w ostatnich dekadach teoria procesów stochastycznych.

Poniżej przedstawione zostaną podstawowe definicje związane z ryzykiem oraz zaprezentowane zostaną wybrane klasyfikacje. Celem rozważań wstępnych będzie wprowadzenie podstawowych pojęć umożliwiających zdefiniowanie pojęcia ryzyka instrumentów finansowych oraz miar tego ryzyka.

W teorii ryzyka bardzo ważną rolę odgrywają dwa pojęcia „**niepewność**” i „**ry-**

zyko”. Szeroki przegląd i podsumowanie zagadnień związanych z definiowaniem niepewności i ryzyka wraz z kontekstem historycznym znaleźć można w pracach P. Bernsteina (1997), W. Ronki-Chmielowiec (2000) oraz W. Tarczyńskiego i M. Mojsiewicz (2001). Poniżej przedstawione zostaną jedynie przykładowe, najczęściej rozpatrywane podejścia.

Konieczność rozróżniania pojęć **ryzyka** i **niepewności** oraz pierwsze definicje wprowadził w 1901 roku A. Willett. Ryzyko według Willetta ma charakter obiektywny, od którego zależy subiektywna niepewność (por. Willett (1995)). Do definicji tej nawiązał I. Pfeffer twierząc, że ryzyko jest stanem świata, który może być mierzony prawdopodobieństwem, natomiast niepewność jest stanem umysłu, i jako taka może być mierzona jedynie poziomem wiary (por. Pfeffer (1956)).

Jednak najbardziej znane i akceptowane rozróżnienie pomiędzy ryzykiem a niepewnością wprowadził w 1921 roku F. Knight. Niepewność określił on jako możliwość odchylenia od stanu oczekiwanego, której nie można zmierzyć, ponieważ nie można zastosować rachunku prawdopodobieństwa (tzw. niepewność *sensu stricto*). Ryzyko zdefiniował natomiast jako „niepewność” mierzalną, w której odpowiednim przyszłym stanom natury można przypisać określone prawdopodobieństwa (por. Knight (1921)).

W niniejszej pracy jako definicję niepewności przyjęto:

Definicja 1.1.

Niepewność - stan, w którym przyszłe możliwości i szanse ich wystąpienia są nieznanne (por. Głuchowski (2001)).

Jest to definicja zgodna z podejściem zaproponowanym przez F. Knighta.

W zakresie definiowania ryzyka wymienia się ogólnie cztery podstawowe nurty (por. Jackowicz (1996), Wojtasiak (2002)):

- decyzyjny, w którym ryzyko definiowane jest poprzez konsekwencję konieczności podejmowania decyzji w celu realizacji określonych celów w sytuacji niepełnej wiedzy o przyszłości,
- przyczynowy, w którym główny nacisk położony jest na przyczyny ryzyka zwane „źródłami ryzyka”,
- dochodowy, w którym pojęcie ryzyka zawężone zostaje do niemożności określenia rezultatu działań, najczęściej wielkości przyszłego dochodu,

- ilościowy, w którym ryzyko definiowane jest poprzez odpowiednie miary (np. poprzez odchylenie standardowe, prawdopodobieństwo, wrażliwość).

Poniżej przedstawione zostaną typowe definicje pojęcia ryzyka:

Definicja 1.2.

Ryzyko - możliwość niepowodzenia, a w szczególności możliwość zaistnienia zdarzeń niekorzystnych, niezależnych od działającego podmiotu, których nie może on dokładnie przewidzieć i nie może im w pełni zapobiec, a które - przez zmniejszenie użyteczności i/lub przez zwiększenie nakładów - odbierają działaniu zupełnie lub częściowo cechę skuteczności. (por. Kaczmarek (1999)).

Definicja 1.3.

Ryzyko - sytuacja, stan, gdy:

- rezultat, jaki będzie osiągnięty w przyszłości, nie jest znany, ale możliwe jest zidentyfikowanie przyszłych sytuacji,
- znane jest prawdopodobieństwo zrealizowania się poszczególnych możliwości w przyszłości (por. Dziawgo (1998), Głuchowski (2001)).

Definicja 1.2. najbliższa jest podejściu „przyczynowemu”, w którym za istotę ryzyka uważa się „możliwość zaistnienia zdarzeń niekorzystnych” dla podmiotu. Definicja ta nie ogranicza w żaden sposób możliwych „źródeł ryzyka”. Realizację ryzyka rozpatruje się szerzej niż, niż w nurcie dochodowym, a mianowicie w odniesieniu do „skuteczności działań”, która to skuteczność może się oczywiście przekładać na dochód.

Utożsamiając „osiągnięty w przyszłości rezultat” z dochodem podmiotu, można stwierdzić, że definicja 1.3. reprezentuje szeroko rozumiany nurt „dochodowy” w definiowaniu ryzyka. Z punktu widzenia ryzyka inwestycji finansowych, dochód ten może być wyrażony zarówno w jednostkach pieniężnych, jak i jako stopa zwrotu z aktywów.

W obu zaprezentowanych definicjach pominięty został aspekt „decyzyjny”. To pominięcie jest jednak pozorne, gdyż aby mogła nastąpić „możliwość niepowodzenia” lub aby mógł wystąpić „nieznany rezultat”, wcześniej musiały zostać podjęte określone działania będące konsekwencją podjęcia decyzji dotyczących nieznanego przyszłości.

Brak jest natomiast w tych definicjach elementów nurtu „ilościowego”, czyli definiowania ryzyka poprzez jego miary. Autorzy oddzielili bowiem samo pojęcie ryzyka od jego miar. Analogiczne podejście przyjęte zostanie w niniejszej pracy. Definicja 1.3 uwypukla dodatkowo ilościowy (mierzalny) aspekt ryzyka.

Na podstawie zaprezentowanych możliwości zaproponowana została przez autora następująca definicja ryzyka stanowiąca bazę do dalszych rozważań.

Definicja 1.4.

Ryzyko - cecha stanu powstałego po podjęciu określonych decyzji i działań, w konsekwencji których istnieje możliwość zaistnienia zdarzeń niezależnych od podmiotu, które powodują, iż przyszły rezultat pozostaje nieznany, ale możliwe są do zidentyfikowania scenariusze przyszłych zdarzeń wraz z ich prawdopodobieństwami.

Definicja ta uwypukla, iż ryzyko jest konsekwencją podjętych decyzji, które powodują pojawienie się określonych „źródeł” (przyczyn) ryzyka, a te z kolei wpływają na brak możliwości jednoznacznego określenia rezultatów działań. Zakłada się mierzalny charakter ryzyka. W przypadku inwestycji finansowych, „decyzja” odnosi się do zakupu lub sprzedaży instrumentu finansowego, a „rezultat działań” to osiągnięcie zakładanego dochodu.

Warto jednak zaznaczyć, iż istnieje wiele innych możliwych rozwiązań. Zaprezentowane zostały one na przykład w pracy W. Ronki-Chmielowiec dowodząc, że podanie jednoznacznej definicji ryzyka jest zadaniem bardzo skomplikowanym, lub wręcz niemożliwym (por. Ronka-Chmielowiec (2001)).

Czasami ryzyko definiuje się także posługując się odpowiednim zbiorem cech przy jego opisie. Niezbędne staje się wówczas opisanie następujących pojęć: „źródło ryzyka”, „przedmiot ryzyka”, „podjęcie ryzyka”, „możliwość sterowania ryzykiem”, „realizacja ryzyka”, „następstwo realizacji ryzyka” (por. Szydło (1997)).

Zaproponowana definicja ryzyka jest bardzo ogólna. Dodatkowo wyróżnia się różne możliwe aspekty ryzyka. Można mówić na przykład o ryzyku (por. Ronka-Chmielowiec (2001)):

- obiektywnym i subiektywnym,
- jednokierunkowym i dwukierunkowym,

- fundamentalnym i partykularnym.
- **Ryzyko obiektywne** określane jest za pomocą odpowiednio zdefiniowanych miar ryzyka. Istotą tego ryzyka jest możliwość wprowadzenia jednoznacznego (niezależnego od osoby analizującej) pomiaru lub uporządkowania skutków potencjalnych realizacji ryzyka¹. Aspekt ten wynika bezpośrednio z braku pewności co do przyszłego stanu natury, który jest cechą otaczającej podmioty rzeczywistości będącej wspólną dla wszystkich działających w tym samym czasie, miejscu i zajmujących się tą samą działalnością podmiotów. Dodatkowo zakłada się, że pojedynczy podmiot nie ma wpływu na ryzyko wynikające ze stanu natury.
- **Ryzyko subiektywne** oparte jest natomiast na osobistych uwarunkowaniach psychologicznych osoby lub osób analizujących ryzyko. Ryzyko subiektywne może być utożsamiane na przykład z indywidualną oceną szansy wystąpienia określonego stanu lub z indywidualną oceną konsekwencji i wówczas jego miarą wielkości jest stopień wiary, iż coś się wydarzy. Skutkuje to tym, że w tych samych warunkach (przy tym samym ryzyku obiektywnym), podmioty mogą podejmować odmienne decyzje. Tłumaczy się to poprzez teorię użyteczności i możliwy, odmienny dla każdego podmiotu kształt funkcji użyteczności, a tym samym odmienny stosunek do ryzyka. W ramach teorii użyteczności wyróżnia się podmioty cechujące się awersją, neutralnością lub skłonnością do ryzyka.
- Aspekt **jednokierunkowy ryzyka** (aspekt negatywny) związany jest z podejściem, w którym podmiot decyzyjny uwzględnia jedynie możliwe negatywne zdarzenia, których skutki powodują uzyskanie w przyszłości rezultatu gorszego od założonego. Jest to tak zwane *negatywne* rozumienie ryzyka. Podejście to jest zgodne z potocznym, najczęstszym rozumieniem terminu ryzyko.
- Ryzyko rozważane jest w aspekcie **dwukierunkowym**, jeśli interpretowane jest ono jako właściwość stan, w którym istnieje możliwość wystąpienia rezultatu niezgodnego z założonym i końcowy efekt może być gorszy lub lepszy od oczekiwanego. Jest to tzw. *neutralne* ujęcie ryzyka.
- **Ryzyko fundamentalne** (systematyczne) jest rozpatrywane w makroskali, a jego przejawy odnoszą się nie tylko do pojedynczego podmiotu, lecz całego

¹ Niektóre rodzaje ryzyka można zmierzyć za pomocą zmiennych ilościowych, inne zaś można wyrazić jedynie za pomocą kategorii opisowych.

systemu gospodarczego (a w każdym razie do dużej ilości jednostek). Jako źródła ryzyka fundamentalnego wymienia się zwykle gospodarcze kryzysy międzynarodowe, a przynajmniej o charakterze krajowym, wojny, ale także katastrofy związane z siłami przyrody (powódzie, trzęsienia ziemi).

- **Ryzyko partykularne** (niesystematyczne) jest rozpatrywane, w przeciwieństwie do ryzyka fundamentalnego, w mikroskali i związane jest oddziaływaniem na pojedyncze podmioty. Jego źródeł można upatrywać zarówno w czynnikach zależnych od danego podmiotu (np. polityka wewnętrzna, **decyzje inwestycyjne**), jak i w czynnikach niezależnych (np. działania konkurencji, niewywiązanie się kontrahentów, pożar itp.).

Na potrzeby tej pracy, ryzyko analizowane będzie w kontekście ryzyka obiektywnego, dwukierunkowego, a także w aspekcie partykularnym. Wszelkie odstępstwa od tej zasady będą wyraźnie zaakcentowane.

W dalszej części pracy spośród wielu rodzajów ryzyka, na które narażony jest każdy podmiot, analizie poddane zostanie ryzyko finansowe.

1.2. Ryzyko finansowe

W zależności od prowadzonej działalności, instytucja może być narażona na różne rodzaje ryzyka. Realizacja takich niezabezpieczonych ryzyk przekłada się na wynik finansowy analizowanego przedsiębiorstwa.

Tak samo, jak w stosunku do pojęcia „ryzyka”, spotyka się odmienne (czasami wręcz wykluczające się wzajemnie) definicje pojęcia **ryzyka finansowego**.

W literaturze pojawia się również pojęcie **ryzyka gospodarczego**, które zazwyczaj interpretowane jest szerzej niż ryzyko finansowe.

Ryzyko gospodarcze (*economic risk*) - możliwość nieosiągnięcia spodziewanych efektów ekonomicznych działalności gospodarczej lub poniesienia strat, przekroczenia kosztów, zmniejszenia przychodów (por. Olzacka, Pałczyńska (1998)).

Ryzyko finansowe jest składową ryzyka gospodarczego. Poniżej przedstawione zostaną podstawowe definicje ryzyka finansowego, spotykane w literaturze.

Definicja 1.5.

Ryzyko finansowe - wiąże się z możliwymi przepływami pieniężnymi, które płaci i otrzymuje podmiot. Ryzyko to wynika z powiązania tego podmiotu z otoczeniem, zwłaszcza z rynkiem finansowym (por. Jajuga (1999b)).

Definicja 1.6.

Ryzyko finansowe - jest prawdopodobieństwem utraty przez organizację posiadanych zasobów finansowych oraz prawdopodobieństwem utraty środków finansowych, które są już w organizacji oraz nie osiągnięcia spodziewanych zysków (por. Bizon-Górecka (2000)).

Definicja 1.7.

Ryzyko finansowe - można określić jako ryzyko, które wiąże się z możliwością poniesienia strat na rynkach finansowych (por. Jorion (2001)).

Jak widać, brak jest również jednoznacznej definicji ryzyka finansowego². Cechą wspólną powyższych definicji jest powiązanie ryzyka finansowego z przepływami finansowymi z otoczeniem podmiotu. Definicja 1.7. zawęża otoczenie jedynie do rynku finansowego. Definicje 1.6. i 1.7. definiują ryzyko finansowe w kontekście negatywnym, co jest niezgodne z przyjętym w tej pracy neutralnym aspektem ryzyka.

W dalszej części pracy przyjęta zostanie definicja 1.5., która pozwala w ramach ryzyka finansowego (analizowanego w aspekcie neutralnym) ująć zarówno ryzyko związane z rynkiem instrumentów finansowych, jak i z rynkiem towarowym (np. zmianami cen metali, towarów rolnych, czy ropy naftowej lub energii).

W wielu pracach ryzyko finansowe definiuje się poprzez podanie bardziej szczegółowych rodzajów ryzyka, które składają się na analizowane ryzyko finansowe.

Także podział ryzyka finansowego nie jest w literaturze jednoznaczny. Konsekwentnie przyjmując definicję 1.5. jako definicję ryzyka finansowego, wyróżnić można

²Istnieją również definicje ryzyka finansowego ujmujące pod tą nazwą całkiem odmienne zagadnienia. Przykładem może być powiązanie ryzyka finansowego z faktem finansowania części majątku firmy kapitałem obcym (por. Głuchowski (2001)), czy z równowagą pomiędzy wpływami i wydatkami pieniężnymi (por. Uyemura, van Deventer (1997), Bogacka (1998)). Definicje te nie będą przedmiotem rozważań niniejszej pracy.

kilka podstawowych rodzajów ryzyka finansowego. Do najważniejszych należą (por. Jajuga (1998), Wojtasiak (2002)):

- ryzyko rynkowe (*market risk*),
- ryzyko płynności (*liquidity risk*),
- ryzyko kredytowe (*credit risk*),
- ryzyko operacyjne (*operational risk*),
- ryzyko prawne (*legal risk*),
- ryzyko biznesu (*business risk*).

Ryzyko rynkowe jest ryzykiem wynikającym ze zmian cen na rynkach finansowych i towarowych. Ryzyko to dotyczy zarówno zmian cen instrumentów bazowych (stóp procentowych, cen akcji, indeksów, walut, towarów), jak i zmian cen instrumentów pochodnych (opcji, warrantów, kontraktów terminowych, swapów). Bardzo często ryzyko to łączy się również z ryzykiem płynności instrumentów finansowych.

Ryzyko płynności występuje w sytuacji, gdy ze względu na niedopasowanie wielkości podaży i popytu, bądź ze względu na przeciwstawne oczekiwania stron rynku, niemożliwe lub utrudnione jest kupowanie bądź sprzedawanie danego instrumentu finansowego lub towaru bez ponoszenia dodatkowych kosztów natychmiastowego otwarcia lub zamknięcia pozycji. Podejście to jest zgodne z traktowaniem ryzyka płynności w kontekście ryzyka płynności aktywów³.

Ryzyko kredytowe jest ryzykiem związanym z możliwością niedotrzymania warunków kontraktu przez drugą stronę transakcji. Może ono dotyczyć sytuacji, gdy partner zaprzestaje spłaty zobowiązań, opóźnia się z terminami spłaty lub nie wywiązuje się w inny sposób ze zobowiązań finansowych w całości lub częściowo.

Ryzyko operacyjne jest ryzykiem o charakterze systemowym (niezwiązanym z inwestowaniem), którego źródło tkwi w niewystarczającej kontroli, niesprawnych systemach, błędach człowieka, niewłaściwym zarządzaniu. Osobno wyróżnia się

³Ryzyko płynności określa się też czasami w kontekście ryzyka płynności pasywów, rozumianego jako „niemożność terminowego pokrywania zobowiązań” (por. Jorion (2001)).

więc na przykład: ryzyko personelu, organizacyjne, (braku) kontroli, infrastruktury technicznej. Ryzyko to obejmuje w szczególności również ryzyko oszustwa, ryzyko regulacji⁴, ryzyko katastrofowe (związane z siłami przyrody). Jednym z aspektów ryzyka operacyjnego jest ryzyko utraty reputacji.

Ryzyko prawne związane jest z możliwością poniesienia strat w wyniku prowadzenie przez podmiot działalności wykraczającej poza ramy odpowiednich przepisów prawnych lub regulacji i obejmujące niemożność wyegzekwowania warunków kontraktu. Ryzyko prawne wiąże się również z sytuacją, gdy następuje nieprzewidziana zmiana prawa, prowadząca do zmiany sytuacji podmiotu. Ryzyko to można definiować również w aspekcie neutralnym, w którym zmiany prawa mogą prowadzić do uzyskania korzyści. Ryzyko to bywa uznawane za składową ryzyka operacyjnego.

Ryzyko biznesu związane z prowadzoną przez instytucję (przedsiębiorstwo) działalnością podstawową, rynkiem produktów i usług. Ryzyko to ma charakter długoterminowy i strukturalny, powstający na skutek decyzji inwestycyjnych dotyczących m.in. wyboru strategii rozwoju, strategii marketingowej, decyzji cenowych, decyzji co do poziomu przyszłej sprzedaży.

W dalszej części pracy poruszane będą zagadnienia dotyczące wyłącznie ryzyka rynkowego. Niezbędne jest zatem zdefiniowanie w ramach ryzyka rynkowego poszczególnych rodzajów tego ryzyka.

Zwykle wyróżnia się w ramach ryzyka rynkowego (por. Jajuga (1999a)):

- ryzyko cen akcji (*stock price risk*),
- ryzyko kursu walutowego (*exchange rate risk*),
- ryzyko cen towarów (*commodity price risk*),
- ryzyko stopy procentowej (*interest rate risk*).

Przy tym w każdym z czterech powyższych rodzajów można mówić o dwóch rodzajach cen, tzn. cenach *spot* (natychmiastowych) i cenach *forward* (terminowych).

⁴Ryzyko regulacyjne wiąże się z możliwością poniesienia strat przez przedsiębiorstwo, które nie przestrzega odpowiednich przepisów i regulacji odnoszących się do jego działalności. Straty te mogą być związane z koniecznością wypłaty odszkodowania dla klientów, narzuceniem przez władze regulacyjne kar finansowych, zawieszeniem lub zakazaniem pełnienia obowiązków przez ważne dla przedsiębiorstwa osoby lub nawet, w szczególnych przypadkach, zamknięciem firmy.

Wprowadzenie do rozważań ceny *forward* pozwala na analizę ryzyka cen instrumentów pochodnych (opcji, kontraktów *forward*, kontraktów *futures*, kontraktów *swap* i wszystkich instrumentów pochodnych od nich się wywodzących).

Ryzyko cen akcji spowodowane jest odmiennymi od oczekiwanych zmianami kursów akcji. Z ryzykiem tym związane jest wprost ryzyko zmian indeksów akcji. W przypadku inwestowania w instrument bazowy, w zależności od tego, czy inwestor otwierał pozycję długą czy krótką traci on, w przypadku spadku kursu (dla pozycji długiej), bądź wzrostu kursu (dla pozycji krótkiej). Analogicznie zyskuje w przypadku wzrostu kursu (dla pozycji długiej) oraz spadku kursu (dla pozycji krótkiej). W przypadku inwestycji w instrumenty pochodne zagadnienie jest bardziej skomplikowane i zależy zarówno od zmiany kursu instrumentu bazowego, jak i typu instrumentu pochodnego. Szczegółowe przypadki dla strategii zakładających inwestowanie w podstawowe instrumenty pochodne znaleźć można w pracy Jajugi, Kuziak i Markowskiego (por. Jajuga, Kuziak, Markowski (1997)).

Ryzyko kursu walutowego określić można jako możliwość wpływu zmiany kursu wymiany walut na sytuację finansową analizowanego podmiotu. Zgodnie z neutralnym rozumieniem ryzyka, zmiany te mogą prowadzić zarówno do pozytywnych, jak i negatywnych zmian sytuacji firmy.

Jeśli spada kurs waluty, tzn. spada cena obcej waluty w walucie krajowej, to aktywa denominowane w walucie obcej przynoszą straty, natomiast pasywa denominowane w walucie obcej przynoszą dochód. W przypadku wzrostu kursu waluty, sytuacja jest odwrotna. W procesie analizy ryzyka kursu walutowego niezbędne jest zidentyfikowanie wszystkich pozycji w aktywach i pasywach, które są denominowane w walutach obcych, bądź których wartość jest indeksowana względem kursu walut obcych. Ostatecznie o ekspozycji na ryzyko świadczy różnica pomiędzy zidentyfikowanymi aktywami i pasywami w każdej z analizowanych walut. Źródłem ryzyka są najczęściej import lub eksport produktów lub usług, kredyty i pożyczki denominowane w walucie obcej oraz wszelkie inwestycje w walucie obcej (gotówka, papiery wartościowe).

Ryzyko cen towarów jest spowodowane odmiennymi od oczekiwanych zmianami cen towarów.

Ryzyko to ma podobne cechy jak ryzyko zmian cen akcji. Warto zaznaczyć, iż ryzyko to dotyczy obok zmian na przykład kursów metali, produktów rolnych, ropy także zmiany cen energii elektrycznej.

Ryzyko stopy procentowej to możliwość wpływu zmian rynkowych stóp procentowych na sytuację finansową analizowanego podmiotu.

Wielkość ryzyka stopy procentowej, na które narażony jest podmiot inwestujący, zależy m.in. od:

- wielkości możliwej różnicy pomiędzy oczekiwaną a obserwowaną na rynku stopą procentową,
- wrażliwości inwestycji na zmianę struktury stóp procentowych,
- wolumenu transakcji.

Warto zaznaczyć, że wymienione powyżej rodzaje ryzyka mogą się przenikać, gdyż kupujący na przykład akcje przedsiębiorstwa zagranicznego, narażony jest zarówno na ryzyko zmian cen akcji, jak i kursu waluty, a kupujący na przykład zagraniczną obligację o zmiennym oprocentowaniu, narażony jest na ryzyko zmian stóp procentowych i zmian kursu walutowego.

Przedstawione w niniejszej pracy zagadnienia mogą posłużyć przede wszystkim do zarządzania ryzykiem cen akcji, indeksów akcji, cen towarów i kursów walut. Niemniej przedstawione zostaną również proste metody związane z zarządzaniem ryzykiem stóp procentowych. Jest to jednak zagadnienie odbiegające od technik wykorzystywanych w związku z pozostałymi rodzajami ryzyka rynkowego.

1.3. Podstawowe elementy procesu zarządzania ryzykiem

All of life is the management of risk, not its elimination.

Walter Wriston

O ile ryzyko zostanie potraktowane nie tylko jako zagrożenie, ale również jako szansa sukcesu (neutralne podejście do ryzyka), to takie pojmowanie ryzyka uniemożliwia decydom korzystanie jedynie z metod eliminacji ryzyka i przeciwdziałania potencjalnym zagrożeniom. Zmusza ich również do akceptacji ryzyka i ogólnego zarządzania jego poziomem (por. Jedynak, Szydło (1997)).

Ryzyko jest w gruncie rzeczy czymś pozytywnym i powoduje, że człowiek próbuje doskonalić swą wiedzę tak, aby działania, które podejmuje były nowatorskie oraz efektywne. Istotą biznesu jest więc podejmowanie ryzyka. Jednakże nie oznacza to konieczności akceptowania każdego rodzaju ryzyka w dowolnej wielkości.

Niezbędne staje się więc *zarządzanie ryzykiem*.

W obecnych czasach, zarządzanie ryzykiem w przedsiębiorstwie produkcyjnym lub instytucji finansowej nie jest wyłącznie elementem podniesienia ekonomicznej efektywności, ale przede wszystkim zapewnienia jego rynkowej egzystencji.

Na potrzeby pracy przyjęto następującą definicję zarządzania ryzykiem:

Definicja 1.8.

Zarządzanie ryzykiem - jest to projektowanie i wdrażanie struktury czasowej przepływów pieniężnych w celu osiągnięcia pożądanego poziomu ryzyka (por. Jajuga (1999b)).

Odmienne „zarządzanie ryzykiem” definiowane jest również jako:

Definicja 1.9.

Zarządzanie ryzykiem - jest to system metod i działań zmierzających do **obniżenia stopnia oddziaływania ryzyka** na funkcjonowanie podmiotu gospodarczego i do podejmowania w tym celu optymalnych decyzji. (por. Multimedialna Encyklopedia Powszechna (2002), PWN)

Definicja 1.8. nie zawęża zagadnienia zarządzania ryzykiem jedynie do „obniżania stopnia oddziaływania ryzyka”. W zależności od celów wyznaczonych przez podmiot decyzyjny, przyjęcie „pożądanego poziomu ryzyka” może oznaczać także zastosowanie strategii zwiększającej poziom ryzyka w celu osiągnięcia potencjalnie większego dochodu. Umiejętne zarządzanie ryzykiem staje się coraz bardziej niezbędne także ze względu na coraz bardziej popularną ocenę procesu inwestowania przez miary uwzględniające nie tylko dochód, ale także ryzyko (np. miary oceny portfela Jensena, Treynora czy Sharpe’a (por. Jajuga, Kuziak, Markowski (1997)), ale także ważony ryzykiem wynik finansowy (por. Jorion (2001)).

Z pojęciem zarządzania ryzykiem wiąże się inne bardzo popularne i ważne z punktu

widzenia niniejszej pracy pojęcie współczesnych finansów, a mianowicie ”**inżynieria finansowa**”.

Definicja 1.10.

Inżynieria finansowa - to umiejętność projektowania i wdrażania innowacji finansowych w dziedzinie nowoczesnego zarządzania finansami, umożliwiająca optymalny wybór metody finansowania działalności i efektywne zarządzanie ryzykiem inwestycji, silnie wsparta przez zaawansowane metody matematyczne, w tym metody wyceny instrumentów finansowych (bazowych i pochodnych) i modelowania ryzyka, a także przez nowoczesną technologię informatyczną (por. Tarczyński, Zwolankowski (1999)).

Zaprezentowane w tej pracy metody ilościowe pozwalające modelować zmiany cen, mierzyć ryzyko i wyceniać instrumenty pochodne, pozwalają niewątpliwie umieścić zagadnienia związane z tak rozumianym zarządzaniem ryzykiem w ramach inżynierii finansowej.

Kontynuując rozważania o zarządzaniu ryzykiem finansowym, warto zauważyć, iż w ostatnich latach zaszło w tym obszarze wiele istotnych zmian (por. Jajuga (1999b)). Spośród najważniejszych tendencji w zarządzaniu ryzykiem finansowym warto wymienić następujące:

- pojawienie się nowych metod zarządzania ryzykiem, w których wykorzystuje się instrumenty pochodne (np. opcje, czy kontrakty terminowe),
- skrócenie horyzontu zarządzania ryzykiem nawet do jednego dnia, co wymusza stosowanie w miejscu tradycyjnych procedur opartych na sprawozdaniach finansowych (a więc narastającej rejestracji zdarzeń) procedur „*marking to market*”, czyli bieżącego zarządzania pozycjami na rynkach finansowych,
- integrację systemów zarządzania ryzykiem finansowym polegającą na kompleksowym zarządzaniu wszystkimi rodzajami ryzyka,
- zwiększenie znaczenia wyrafinowanych metod matematycznych, których wykorzystanie wiąże się często z koniecznością zastosowania nowoczesnych, komputerowych programów obliczeniowych.

W ramach współczesnego zarządzania ryzykiem finansowym wyróżnia się ponadto:

Strategiczne zarządzanie ryzykiem, które dotyczy problematyki wprowadzania zarządzania ryzykiem w podmiocie i głównym jego zadaniem jest sformułowanie ogólnej polityki dotyczącej zarządzania ryzykiem. Odbywa się to na poziomie kierowniczym.

Operacyjne zarządzanie ryzykiem, którego celem jest przeniesienie szczegółów strategii zarządzania ryzykiem do sfery praktyki.

Zagadnienia prezentowane w dalszej części pracy mogą znaleźć potencjalne zastosowanie zarówno w strategicznym, jak i operacyjnym zarządzaniu ryzykiem, wykorzystywane są one bowiem w analizie ryzyka na poziomie całej instytucji, jak i pojedynczego instrumentu.

Zarządzanie ryzykiem finansowym (a także ogólnie ryzykiem) powinno odbywać się zarówno na poziomie każdego z rodzajów ryzyka osobno w sposób zdecentralizowany, a także w aspekcie ryzyka łącznego instytucji z uwzględnieniem wszelkich składowych ryzyka (por. Jorion (2001)).

Czy to w odniesieniu do pojedynczych rodzajów ryzyka, czy w stosunku do łącznego ryzyka instytucji, wyróżnia się najczęściej następujące etapy procesu zarządzania ryzykiem:

- identyfikacja ryzyka,
- ocena (pomiar) ryzyka,
- sterowanie ryzykiem - wybór i wdrożenie odpowiedniej techniki zarządzania ryzykiem,
- monitorowanie (kontrola) programu zarządzania ryzykiem i opracowanie programu zmian.

Identyfikacja (rozpoznanie) ryzyka

Identyfikacja ryzyka jest etapem rozpoczynającym chronologicznie proces zarządzania ryzykiem. Jest to faza informacyjna, polegająca na określeniu rodzajów ryzyka, które mogą zagrażać danemu podmiotowi. Przyjmując nadal „dwukierunkową” (neutralną) definicję ryzyka, oznacza to identyfikację oraz systematyczne ujęcie wszelkich źródeł potencjalnych korzyści i niebezpieczeństw, które mogą przyczynić się za-

równy do uzyskania dochodów wyższych, jak i niższych od oczekiwanych. Zazwyczaj etap ten odbywa się w sposób zdecentralizowany, w poszczególnych obszarach działalności firmy oraz w poszczególnych oddziałach firmy. Niezbędne są więc procedury ujednociające proces identyfikacji ryzyka oraz umożliwiające agregację cząstkowych informacji.

Ocena (pomiar) ryzyka

Naturalnym dążeniem każdego decydenta, który poprzez swoje decyzje podejmuje ryzyko, powinna być chęć zapewnienia sobie możliwości opisu konsekwencji podjętych działań, bądź to w postaci scenariuszy, czyli opisowych form ukazania zależności i następstw określonych działań, bądź poprzez nadanie określonej matematycznej miary. Pomiar ryzyka może przebiegać w różny sposób i jest zdeterminowany poprzez:

- charakter mierzonej wielkości,
- zakres dostępnych danych.

Przedmiotem rozważań w przypadku pomiaru ryzyka powinno być więc przede wszystkim przyjęcie możliwych do zastosowania miar ryzyka.

Pomiar ryzyka polegający na wyznaczeniu konkretnej wartości liczbowej związany jest z omawianą wcześniej koncepcją analizy ryzyka w aspekcie obiektywnym. Obecnie dąży się do ujednoczenia sposobu wyrażania ryzyka i umożliwienia informowania decydenta za pomocą jednej wartości liczbowej o całkowitym ryzyku podmiotu (por. Jorion (2001)).

Oszacowanie obiektywnej wielkości ryzyka, na które narażony jest podmiot, nie kończy etapu oceny ryzyka. Etap ten kończy dopiero subiektywna ocena poszczególnych rodzajów ryzyka (i ryzyka łącznego) oraz selekcja prowadząca do wyróżnienia:

- **ryzyka nieistotnego**, które przestaje być przedmiotem dalszych szczegółowych rozważań w ramach kolejnych etapów procesu zarządzania ryzykiem,
- **ryzyka pod obserwacją**, gdy istnieją powody by sądzić, że chwilowo nieistotne ryzyko może stanowić potencjalne zagrożenie w przyszłości i należy monitorować je szczególnie uważnie.
- **ryzyka istotnego**, w stosunku do którego niezbędne jest wdrożenie kolejnych etapów procesu zarządzania ryzykiem.

Miary możliwe do zastosowania w kontekście ryzyka rynkowego przedstawione zostaną w rozdziale 1.4.

Sterowanie ryzykiem

Sterowanie ryzykiem odbywa się na szczeblu decyzyjnym podmiotu i oznacza podejmowanie przedsięwzięć mających na celu dostosowanie (najczęściej zmniejszenie) ryzyka do założonych, akceptowalnych rozmiarów. (por. Zawadzka (2001)).

W ramach zarządzania ryzykiem rynkowym możemy wyróżnić (por. Jedynak i Szydło (1997), Zawadzka (1999)):

- strategie aktywne - oddziałujące na przyczyny występowania ryzyka, a więc mające na celu ograniczenie wielkości ryzyka. Do takich strategii zaliczamy:
 - unikanie ryzyka - polegające na zaniechaniu podejmowania pewnych działań obarczonych z punktu widzenia decydenta zbyt dużym ryzykiem (nie inwestowaniu),
 - dywersyfikację ryzyka - polegającą w przypadku ryzyka rynkowego na inwestowaniu w różne instrumenty o niskiej i najlepiej ujemnej korelacji stóp zwrotu, bez przenoszenia ryzyka na inne podmioty,
- strategie pasywne - oddziałujące na skutki, a więc mające na celu zmniejszenie negatywnego wpływu niespodziewanych strat na pozycję finansową podmiotu. Najczęściej stosuje się:
 - przenoszenie ryzyka na inne podmioty - polegające zazwyczaj na transferze ryzyka do innych podmiotów. W ramach tej strategii, możliwe jest także przyjmowanie ryzyka od innych podmiotów. W stosunku do wielu rodzajów ryzyka związane jest to z zakupem polisy ubezpieczeniowej. W ramach zarządzania ryzykiem finansowym wykorzystuje się w tym zakresie najczęściej wszelkiego rodzaju instrumenty pochodne,
 - tworzenie rezerw.

Kontrolowanie i nadzór

Kontrola jest w większości przypadków wymieniana jako końcowy etap procesu zarządzania ryzykiem, warto jednak zwrócić uwagę na konieczność kontroli także w trakcie wcześniejszych etapów.

Według Zawadzkiej kontrola w procesie zarządzania ryzykiem powinna obejmować przede wszystkim (por. Zawadzka (1999)):

- ocenę metod identyfikacji i pomiaru ryzyka z punktu widzenia ich dokładności i aktualności,

- ocenę zastosowanych rozwiązań w ramach procesu sterowania ryzykiem z punktu widzenia poniesionych kosztów i osiągniętych korzyści,
- ocenę organizacyjnego aspektu zarządzania ryzykiem; stopnia centralizacji i decentralizacji w tym zakresie, a także stopnia spójności i jasności procedur.

Z punktu widzenia niniejszej pracy najważniejszy pozostaje aspekt związany z oceną pomiaru ryzyka, w którym weryfikacji podlegają modele przyjęte do opisu szeregów cen, stóp zwrotu, czy zmienności (por. rozdział 2.) oraz techniki prognoz ryzyka (por. rozdział 3.)

Kontrola i nadzór odbywają się więc w ramach szeregu sprzężeń zwrotnych w zakresie informacji uzyskiwanych w poszczególnych etapach procesu zarządzania ryzykiem. Niezbędne pozostaje również ciągłe udoskonalanie całego procesu, wdrażanie nowych narzędzi oraz wyznaczanie przyszłych kierunków zarządzania ryzykiem.

1.4. Miary ryzyka rynkowego

*Kiedy nie można czegoś zmierzyć,[...] nasza
wiedza o tym staje się uboga i niezadowolająca.*

Lord Kelvin

*Jeśli nie można czegoś zmierzyć,
należy zmierzyć to tak, jak się da.*

Knight

Jak już zostało powiedziane, jednym z najważniejszych etapów procesu zarządzania ryzykiem jest jego pomiar. Zagadnienie związane z pomiarem ryzyka instrumentów finansowych jest bardzo szerokie. Obszarem zainteresowań niniejszej pracy jest jednak wyłącznie pomiar ryzyka rynkowego związanego ze zmianami cen instrumentów finansowych.

Dążeniem każdego decydenta, który podejmuje ryzyko, jest zapewnienie sobie możliwości określenia potencjalnych następstw decyzji poprzez pomiar podjętego ryzyka.

Rozpatrując całą gamę dostępnych instrumentów finansowych trudno wskazać jedną koncepcję pomiaru ryzyka rynkowego. Dla poszczególnych grup instrumentów finansowych istnieją odpowiednio zdefiniowane tradycyjne miary ryzyka. Przyjęcie

określonej miary ryzyka to znalezienie odpowiednich i spójnych procedur, za pomocą których elementy ryzyka będzie można przedstawić w postaci liczbowej. W tym przypadku poprzez „**miarę**” rozumie się wartość danej wielkości wyrażoną iloczynem liczby i jednostki. Jak zostanie przedstawione w dalszej części rozdziału, typowe miary ryzyka rynkowego wyrażone mogą być w jednostkach pieniężnych, niemianowanych, a nawet w jednostkach czasu.

Poniżej przedstawione zostaną podstawowe miary ryzyka rynkowego, ze szczególnym uwzględnieniem miar, które znalazły akceptację wśród praktyków. Poza jedną miarą - *Expected Shortfall* - żadna z nich nie jest **miarą spójną (koherentną)** (*coherent risk measure*) w sensie zaproponowanym przez Artznera, Debaena, Ebera i Heatha. Spełniają one jedynie pojedyncze wymagane własności (por. Artzner, Delbaen, Eber i Heath (1998), Föllmer, Schied (2002)). Być może spójna pod względem matematycznym koncepcja pomiaru ryzyka nie okaże się nigdy miarą, która zostanie zaakceptowana przez praktyków.

Najczęściej wyróżnia się w praktyce trzy grupy miar ryzyka rynkowego. Kryterium podziału jest sposób rozumienia i ujmowania ryzyka. W tym kontekście wyróżnia się następujące grupy miar ryzyka rynkowego (por. Jajuga (1999)):

- miary zmienności (*volatility measures*),
- miary zagrożenia (*downside risk measures*),
- miary wrażliwości (*sensitivity measures*).

W pracy główny nacisk położony zostanie na miary zmienności. Pokazany zostanie również związek pomiędzy miarami zmienności a metodami szacowania miar zagrożenia.

1.4.1. Miary zmienności

Grupa miar zmienności zyskała popularność i akceptację dzięki klasycznej teorii portfela zaproponowanej przez Markowitza (por. Markowitz (1952)).

Ryzyko rozumiane jest tutaj zgodnie z koncepcją neutralną, traktującą ryzyko jako możliwość, że zrealizowany dochód będzie się różnił od oczekiwanego. Dochód rozumiany jest jako stopa zwrotu z inwestycji. Rozróżnia się dwa sposoby wyznaczania stóp zwrotu:

stopę prostą, wykorzystującą model kapitalizacji prostej (por. Smaga (1999)),

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}, \quad (1.1)$$

stopę logarytmiczną, wykorzystującą model kapitalizacji ciągłej,

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \right), \quad (1.2)$$

gdzie:

- P_t - cena na koniec okresu inwestycji (zmienna losowa),
- P_{t-1} - cena na początku okresu inwestycji (znana wartość),
- D_t - suma przepływów finansowych występujących w okresie inwestycji, najczęściej związana z wypłatą dywidendy.

Jako miarę zmienności dochodu (stopy zwrotu) można wykorzystać w praktyce dowolną miarę zmienności rozkładu stóp zwrotu.

Miary takie możemy podzielić na (por. Ostasiewicz, Rusnak, Siedlecka (1997)):

- miary pozycyjne,
- miary klasyczne.

Do najprostszych miar pozycyjnych zalicza się:

- **rozstęp**, charakteryzujący empiryczny obszar zmian wartości obserwowanej zmiennej (w tym przypadku wartości zrealizowanych stóp zwrotu). Rozstęp nie dostarcza jednak informacji o zróżnicowaniu poszczególnych wartości cechy w zbiorowości.
- **odchylenie ćwiartkowe**, które mierzy poziom zróżnicowania tylko części obserwacji pozostałych po odrzuceniu 25% obserwacji o wartościach największych i 25% obserwacji o wartościach najmniejszych.

Miary powyższe nie są praktycznie stosowane, gdyż powodują one znaczną utratę informacji. Wartość rozstępu zależy jedynie od dwóch skrajnych wartości ekstremalnych w zbiorze i nie uwzględnia typowych zmian stóp zwrotu. Odchylenie ćwiartkowe uwzględnia natomiast (odwrotnie) jedynie typowe zmiany cen (typowe wartości stóp

zwrotu), nie uwzględniając zupełnie obserwacji nietypowych, ekstremalnych, mogących w przypadku realizacji straty znacznie osłabić pozycję finansową analizowanego podmiotu.

Z tego też powodu, zdecydowanie częściej wykorzystuje się typowe miary klasyczne, jak i ich modyfikacje.

W zagadnieniu pomiaru zmienności finansowych szeregów czasowych niezbędne stają się decyzje co do wyboru:

- stosowanej miary zmienności,
- postaci estymatora określonej miary,
- rodzaju danych, na podstawie których wyznaczana będzie zmienność.

Najczęściej stosowaną praktyką jest wykorzystywanie stóp zwrotu o określonym horyzoncie (zwykle jednego dnia) liczonych na podstawie cen zamknięcia rynku dla poszczególnych instrumentów. W trakcie podokresu t nie jest dostępna więc jeszcze informacja o stopie zwrotu z tego podokresu (r_t) i parametr zmienności szacowany jest na podstawie n stóp zwrotu poprzedzających podokres t .

Najbardziej znaną i preferowaną miarą zmienności pozostaje **odchylenie standardowe stóp zwrotu**⁵.

Typowo odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznacza się z wykorzystaniem następującego estymatora⁶:

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_{t-i} - \bar{r})^2} \quad (1.3)$$

gdzie:

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t-i}, \quad (1.4)$$

s_t - odchylenie standardowe w chwili t ,

n - liczba obserwacji.

Wyznaczona wartość s_t jest oczywiście jedynie oszacowaniem nieznannej wartości odchylenia standardowego rozkładu. Z każdą miarą ryzyka wiąże się również ryzyko samej miary (por. Jajuga (2001a)).

⁵Czasami spotyka się również podejścia uznające za miarę ryzyka wariancję stóp zwrotu.

⁶Oczywiście możliwe jest analizowanie zarówno prostych, jak i logarytmicznych stóp zwrotu.

Przy szacowaniu odchylenia standardowego (jak i innych miar klasycznych) istnieje zawsze problem subiektywnego doboru wielkości próby⁷ oraz subiektywnego podejścia do obserwacji nietypowych.

Przyjęcie niewielkiej liczby obserwacji (jak to ma miejsce np. przy szacowaniu zmienności zrealizowanej w poszczególnych miesiącach (średnio 21 obserwacji)), może prowadzić do znacznych błędów oszacowań. Źródłem błędu jest także oszacowanie średniej \bar{r} . Proponowana modyfikacja procedury (dla krótkich, jednodniowych horyzontów stóp zwrotu) polega najczęściej na przyjęciu założenia, że oczekiwana stopa zwrotu wynosi zero. Zmodyfikowany estymator przyjmuje wtedy postać:

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t-i}^2} \quad (1.5)$$

Podejście takie pozwala poprawić jakość pomiaru ryzyka, a tym samym jego prognoz (zagadnieniu prognozowania parametru s_t poświęcony jest rozdział 3).

Zastosowanie zbyt dużego zbioru obserwacji powoduje natomiast konieczność uwzględnienia odległych w czasie informacji. Przyjmuje się jednak, że dane mniej odległe lepiej opisują stan teraźniejszy rynku i powinny zostać uwzględnione z większą wagą. Powyższy postulat został uwzględniony przez bank J.P. Morgan w procedurze RiskMetrics, w której estymator odchylenia standardowego przyjmuje postać:

$$s_t = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{i=0}^n \lambda^i r_{t-i}^2}, \quad (1.6)$$

gdzie: λ jest współczynnikiem „postarzania informacji”. Wartość współczynnika dobiera się eksperymentalnie. J.P. Morgan w RiskMetrics przyjmuje optymalną wartość współczynnika λ jako 0,94.

Kolejną sygnalizowaną wadą estymatora odchylenia standardowego w typowej postaci jest jego wrażliwość na obserwacje nietypowe.

W literaturze znaleźć można szereg propozycji wykorzystania tzw. estymatorów odpornych (mniej wrażliwych na obserwacje nietypowe) w zakresie szacowania odchylenia standardowego poprzez zastosowanie różnych funkcji zmniejszających wagę uwzględnianych obserwacji wraz ze wzrostem odległości od średniej. Szereg rozwiązań tego typu zaprezentowanych zostało np. w pracy Jochuma (por. Jochum

⁷Przy założeniu, że w ogóle wariancja istnieje i stabilizuje się.

(1999)). Najczęściej wykorzystuje się dodatkową własność prawdziwą w przypadku rozkładu normalnego o zerowej wartości średniej:

$$s_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E[r], \quad (1.7)$$

co prowadzi do następującej postaci estymatora odchylenia standardowego:

$$s_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_{t-i}| \right). \quad (1.8)$$

Estymatory odporne nie znalazły jednak do tej pory szerszej akceptacji w zagadnieniach praktycznych w zakresie pomiaru ryzyka rynkowego.

Posługując się przedstawionymi do tej pory estymatorami, wykorzystuje się, co było sygnalizowane wcześniej, najczęściej stopy zwrotu z cen zamknięcia rynku. Zaproponowano jednak również estymatory uwzględniające także ceny otwarcia rynku, ceny najniższe i najwyższe w analizowanych podokresach (najczęściej w ciągu poszczególnych dni sesyjnych).

Parkinson zaproponował następujący estymator odchylenia standardowego stóp zwrotu bazujący na cenach najwyższych i najniższych w poszczególnych podokresach (por. Parkinson (1980)):

$$s_t = \frac{1}{2n\sqrt{\ln(2)}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_{H t-i}}{P_{L t-i}} \right), \quad (1.9)$$

gdzie:

$P_{H t}$ - cena najwyższa w podokresie (dniu) t ,

$P_{L t}$ - cena najniższa w podokresie (dniu) t ,

Estymator Parkinsona teoretycznie jest estymatorem o większej efektywności niż standardowy estymator odchylenia standardowego, jednak jedynie w przypadku, gdy ma się do czynienia z ciągłymi notowaniami instrumentu. W przypadku, dość częstym na giełdach, że dla danego instrumentu nie obserwuje się transakcji przez pewne dłuższe lub krótsze okresy, może nastąpić zaniżanie wartości oszacowanego ryzyka w stosunku do wartości rzeczywistej (por. Haug (1998)).

Kompromisem jest zastosowanie estymatora zaproponowanego przez Garmana i Klasa (por. Garman, Klass (1980)):

$$s_t = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[\ln \left(\frac{P_{H t-i}}{P_{L t-i}} \right) \right]^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [2 \ln(2) - 1] \left[\ln \left(\frac{P_{t-i}}{P_{t-i-1}} \right) \right]^2}, \quad (1.10)$$

który wykorzystuje większy zbiór informacji, a mianowicie zarówno ceny najwyższe i najniższe, jak i ceny zamknięcia.

Ze względu na poznane i wygodne własności matematyczne odchylenia standardowego, a także fakt, iż to właśnie ta miara została przyjęta w modelu Markowitza, w modelu wyceny opcji Blacka-Scholesa, czy koncepcji pomiaru *VaR* metodą wariancji-kowariancji, miara ta jest najczęściej stosowana zarówno w teorii, jak i praktyce współczesnych finansów. Więcej informacji na temat odchylenia standardowego stóp zwrotu w zasygnalizowanych zagadnieniach zaprezentowane zostanie w dalszej części rozdziału.

Prezentowane do tej pory podejście oparte na odchyleniu standardowym nie jest oczywiście jedynym możliwym.

Możliwe jest zdefiniowanie miary zmienności stóp zwrotu także jako **średnie bezwzględne odchylenie stóp zwrotu od mediany**. Odchylenie to dane jest następującym wzorem:

$$d_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |r_{t-i} - me|, \quad (1.11)$$

gdzie *me* jest wartością mediany w analizowanym szeregu. Mediana jest miarą odporną na obserwacje nietypowe, a uwzględnienie wartości bezwzględnej także powoduje mniejsze uwypuklenie obserwacji nietypowych niż dla odchylenia standardowego.

Prezentowane tutaj podejścia oparte na klasycznym odchyleniu standardowym oraz na średnim bezwzględnym odchyleniu od mediany są szczególnymi przypadkami zagadnienia określania parametrów opartych na normie L_p , gdy posługujemy się normą L_2 i L_1 . W ogólności możliwe jest jednak zdefiniowanie miar zmienności w oparciu o dowolną normę L_p (por. Jajuga (1999a)).

W takim przypadku:

miarę dochodu uzyskuje się przez rozwiązania problemu minimalizacji (ze względu na μ) następującej funkcji:

$$\left[\sum_{i=1}^n (r_{t-i} - \mu)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1.12)$$

a odpowiadająca miara zmienności dana jest wzorem:

$$s_t = \frac{1}{n^{1/p}} \left[\sum_{i=1}^n |r_{t-i} - r_d|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1.13)$$

gdzie: r_d jest miarą dochodu (będącą rozwiązaniem powyższego zagadnienia minimalizacji).

Kończąc rozważania o miarach zmienności warto zaznaczyć, iż nie ma jednej, najlepszej miary zmienności. Dla poszczególnych miar zmienności można zastosować też różne estymatory oraz posługiwać się różnymi zbiorami danych wejściowych.

1.4.2. Miary zagrożenia

Miary zagrożenia są grupą miar najmniej spójną koncepcyjnie. Tą wspólną nazwą określa się szereg odmiennych miar, dla których wspólne jest to, że ich konstrukcja wynika z koncepcji negatywnego rozumienia ryzyka, jako możliwości straty, czy możliwości zrealizowania dochodu różniącego się od oczekiwanego lub satysfakcjonującego (por. Jajuga (2000c)).

Najbardziej popularną miarą zagrożenia jest **wartość zagrożona** (*Value at Risk* - VaR). W ostatnim okresie obserwuje się też wzrost zainteresowania miarą *Expected Shortfall* (*ES*). Zanim jednak zostaną one omówione, zaprezentowane zostaną bardzo skrótowo najprostsze miary zagrożenia wywodzące się z miar zmienności.

Miary typu „semi”

Miary te wywodzą się z klasycznych miar zmienności, jednak ich konstrukcja polega na uwzględnieniu jedynie ujemnych odchyłeń stóp zwrotu od wartości oczekiwanej, gdyż to właśnie te ujemne odchylenia informują o wielkości zagrożenia.

Najprostszą miarą z tej grupy jest zaprezentowane przez Markowitza **semi-odchylenie standardowe** wyznaczane w następujący sposób (por. Markowitz (1959)):

$$ss_t = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n ((r_{t-i} - \bar{r})^-)^2}, \quad (1.14)$$

gdzie:

ss_t - semi-odchylenie standardowe w momencie t ,

n - liczba obserwacji (liczba stóp zwrotu),

m - w zależności od przyjętej konwencji albo liczba wszystkich obserwacji, albo liczba jedynie ujemnych odchyłeń od średniej,

\bar{r} - oczekiwana stopa zwrotu

oraz

$$(x)^- = \begin{cases} 0; & x > 0 \\ x; & x \leq 0. \end{cases}, \quad x = r_{t-i} - \bar{r} \quad (1.15)$$

W analogiczny sposób można zdefiniować na przykład semi-odchylenie przeciętne. Więcej na temat własności miar „semi” znaleźć można w pracy Jajugi, Kuziak, Markowskiego (por. Jajuga, Kuziak, Markowski (1997)).

Dolny moment cząstkowy

Uogólnieniem koncepcji miar „semi” jest zasługująca również przynajmniej na skrótowe przedstawienie miara „dolny moment cząstkowy” (*Lower Partial Moment - LPM*) zdefiniowana w sposób następujący:

$$LPM_t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n ((r_{t-i} - r_a)^-)^q, \quad (1.16)$$

gdzie:

r_a - poziom aspiracji, tj. wymagana stopa zwrotu,

q - rząd modelu.

Jest to koncepcja analogiczna do koncepcji miar „semi”, lecz uwzględniane są z różną siłą (zależną od rzędu modelu) jedynie ujemne odchylenia od wymaganej stopy zwrotu. Szczególne przypadki dla różnych wartości poziomu aspiracji i rzędu modelu przedstawione zostały w pracy Jajugi (por. Jajuga (2000c)).

Innymi prostymi miarami zagrożenia są również:

- poziom bezpieczeństwa,
- prawdopodobieństwo nieosiągnięcia poziomu aspiracji,

Miary te zostały szczegółowo omówione np. w pracy Jajugi, Kuziak i Markowskiego (por. Jajuga, Kuziak, Markowski (1997)).

Miarami zagrożenia, które w ostatnich latach zdobyły największą popularność są jednak **wartość zagrożona** oraz ***Expected Shortfall***.

Wartość zagrożona⁸

Najpopularniejszą w chwili obecnej miarą zagrożenia (zarówno w teorii, jak i w praktyce) jest **wartość zagrożona** (*Value at Risk* - VaR) (por. np. Best (2000), Jorion (2001))

Value at Risk jest to strata wartości rynkowej (instrumentu finansowego, portfela) taka, że prawdopodobieństwo osiągnięcia jej lub przekroczenia w zadanym okresie jest równe przyjętemu poziomowi tolerancji.

W formalny sposób definicję tę zapisuje się jako:

$$P(W_T \leq W_0 - VaR(W_T, \alpha)) = \alpha, \quad (1.17)$$

gdzie:

W_0 - obecna wartość inwestycji,

W_T - wartość inwestycji na końcu rozważanego okresu o długości T ,

α - poziom tolerancji (istotności) VaR (prawdopodobieństwo bliskie zeru),

$VaR(W_T, \alpha)$ - wartość miary obliczona w momencie zero dla okresu przetrzymania T i poziomu tolerancji α . Im niższy poziom tolerancji oraz im dłuższy okres przetrzymania, tym większa wartość VaR . W dalszej części, dla uproszczenia zapisu, pomijane będą argumenty α i W_T przy symbolu VaR .

Do podstawowych zalet miary VaR zalicza się to, że:

- stanowi jednolitą miarę ryzyka, która umożliwi porównanie wielkości zagrożeń i tworzenie zagregowanych miar ryzyka w stosunku do różnych czynników ryzyka,
- wyraża ryzyko w intuicyjnie łatwy do zrozumienia sposób jako potencjalną stratę i jednocześnie informuje o prawdopodobieństwie jej przekroczenia.

Do wad VaR zaliczyć można natomiast, iż określa jedynie stratę spowodowaną w warunkach „normalnego” funkcjonowania rynku i nie informuje o wartościach ekstremalnych zagrożeń oraz, że w szczególnych przypadkach nie spełnia własność subaddytywności⁹ (por. Rokita (2002)).

⁸Spotyka się również tłumaczenie „wartość narażona na ryzyko”.

⁹Własność subaddytywności określa, że każda spójna miara ryzyka musi spełniać warunek, iż ryzyko portfela nie może być większe od sumy ryzyk poszczególnych składników (efekt dywersyfikacji ryzyka).

Więcej o *VaR* znaleźć można w pracach Besta (por. Best (2000)), Joriona (por. Jorion (2001)) oraz w serwisie internetowym www.gloriamundi.org.

Przykładowe metody szacowania *VaR* wraz z powiązaniem tej metody z miarami zmienności zaprezentowane zostaną w podrozdziale 1.5.2. niniejszej pracy.

Expected Shortfall

Ostatnią zasygnalizowaną miarą zagrożenia jest zyskująca coraz bardziej na znaczeniu (niestety nadal jeszcze przede wszystkim w rozważaniach teoretycznych) miara *Expected Shortfall* (por. McNeil (1999), Rokita (2002)).

Jej popularność wiąże się przede wszystkim z faktem, że w przeciwieństwie do *VaR* informuje, czy potencjalne przekroczenie progu zagrożenia jest duże, czy małe. Pozwala to na ujęcie wpływu zdarzeń ekstremalnych, szczególnie niebezpiecznych na rynkach finansowych. Jest to także jedyna spośród prezentowanych miar ryzyka, miara spójna w sensie definicji zaproponowanej przez Artznera, Delbaena, Ebera i Heatha (por. Artzner, Delbaen, Eber i Heath (1998)).

Miara *Expected Shortfall* (*ES*) definiowana jest za pomocą następującej równości:

$$ES = E(L|L > VaR), \quad (1.18)$$

gdzie $L = W_0 - W_T$ to wartość straty przy zadanym horyzoncie inwestycji.

ES jest więc wartością straty pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość *VaR*. Także w tym przypadku definicja nie narzuca gotowych procedur. Bardzo szeroki przegląd technik szacowania *ES* w oparciu o modele stochastyczne szeregów czasowych, czy rozkłady zdarzeń ekstremalnych znaleźć można w pracach zamieszczonych w specjalistycznym serwisie internetowym poświęconym miarom zagrożenia pod adresem www.gloriamundi.org (por. np. McNeil (1999)).

VaR i *ES* są miarami uzupełniającymi się i przy wzroście zainteresowania miarą *ES* trudno oczekiwać spadku znaczenia *VaR*.

1.4.3. Miary wrażliwości

Ostatnią grupą miar ryzyka rynkowego, **nie stanowiącą tematu rozważań niniejszej pracy**, są miary wrażliwości.

Podstawową własnością tych miar jest fakt, że odzwierciedlają wpływ pewnych zmiennych (zwanymi czynnikami ryzyka) na ceny lub stopy zwrotu z analizowanych instrumentów. W przeciwieństwie do miar zmienności, mierzących skutki realizacji ryzyka rynkowego, miary wrażliwości uwzględniają związek pomiędzy czynnikami ryzyka, a ceną lub stopą zwrotu (opisują więc „przyczynę” zmian). Niezbędne w tym przypadku staje się zarówno zidentyfikowanie czynników ryzyka (X_{it}), jak i określenie związku pomiędzy czynnikami ryzyka, a zmianami cen i stóp zwrotu poprzez budowę odpowiedniego modelu (danego funkcją $g(\cdot)$). Modele takie odnoszące się bądź to do zmian cen, bądź do zmian stóp zwrotu mogą mieć zarówno naturę deterministyczną, jak i stochastyczną (por. Jajuga (2000b)).

Miarą wrażliwości ceny, bądź stopy zwrotu na i -ty czynnik ryzyka w chwili t jest pierwsza pochodna cząstkowa funkcji g względem zmiennej X_i :

$$\frac{\partial g(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_i}, \quad (1.19)$$

gdzie:

X_i - i -ty czynnik ryzyka wpływający na cenę w chwili t ,

$g(\cdot)$ - funkcja ceny lub stopy zwrotu względem czynników ryzyka (model).

Miary wrażliwości oparte na pierwszej pochodnej mogą być również uzupełnione o wyższe pochodne cząstkowe. W przypadku nieliniowych funkcji g , funkcje takie przybliża się za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora, w którym w zależności od wymaganej dokładności wykorzystuje się tylko pierwsze lub także wyższe pochodne cząstkowe.

Więcej na temat miar wrażliwości dla poszczególnych grup instrumentów finansowych znaleźć można na przykład w pracy Jajugi (por. Jajuga (2000b)).

1.5. Znaczenie zmienności w nowoczesnej teorii finansów

W tym podrozdziale zaprezentowany zostanie związek koncepcji modelowania i pomiaru ryzyka rynkowego za pomocą najpopularniejszej miary zmienności - od-

chylenia standardowego stóp zwrotu - z najpopularniejszymi zagadnieniami teorii i praktyki współczesnych finansów.

Główny nacisk położony zostanie na pokazanie konieczności modelowania, a następnie prognozowania parametru zmienności. W opisanych bowiem poniżej koncepcjach występuje (nie zawsze w pełni uświadamiana) konieczność przyjęcia określonego modelu, a następnie formułowania prognoz zmienności.

1.5.1. Zmienność a klasyczna teoria portfela

Proces konstrukcji portfela papierów wartościowych możemy podzielić na dwa etapy:

- wybór akcji do portfela,
- ustalenie struktury portfela.

W obydwu tych etapach, poza możliwymi oczywiście innymi rozwiązaniami, pomocna może być klasyczna teoria portfelowa oparta na miarach dochodu, ryzyka i zależności pomiędzy poszczególnymi instrumentami.

W klasycznym modelu Markowitza zakłada się, iż stopy zwrotu posiadają wielowymiarowy rozkład normalny (por. Markowitz (1952), Haugen (1996)).

Oczekiwana stopa zwrotu z portfela jest średnią ważoną oczekiwanych stóp zwrotu z poszczególnych składników portfela:

$$\bar{r}_P = \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad (1.20)$$

gdzie:

\bar{r}_P - oczekiwana stopa zwrotu z portfela,

n - liczba składników portfela,

w_i - udział i -tego składnika w portfelu,

\bar{r}_i - oczekiwana stopa zwrotu z i -tego składnika.

Wariancja stopy zwrotu z portfela dana jest natomiast równaniem:

$$s_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{COV}_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j s_i s_j \rho_{ij}, \quad (1.21)$$

gdzie:

s_P - odchylenie standardowe stóp zwrotu z portfela,

s_i - odchylenie standardowe stóp zwrotu i -tego instrumentu,

cov_{ij} - kowariancja pomiędzy stopami zwrotu instrumentu i -tego i j -tego,

ρ_{ij} - korelacja pomiędzy stopami zwrotu instrumentu i -tego i j -tego.

Racjonalny inwestor ze zbioru możliwości (zbioru możliwych do uzyskania portfeli) wybiera jeden z portfeli leżących na granicy efektywnej (por. np. Haugen (1996)). Formalnie wybór takiego portfela odbywa się poprzez poszukiwanie portfela (wyznaczanie udziałów), który gwarantuje założoną oczekiwaną stopę zwrotu przy najmniejszym możliwym do uzyskania ryzyku¹⁰, co zapisać można jako:

$$\min_{w_i, i=1, \dots, n} s_P = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j s_i s_j \rho_{ij}}, \quad (1.22)$$

przy ograniczeniach danych równaniami (1.20).

Metoda rozwiązywania takiego zagadnienia zaprezentowana została np. w pracy Jajugi, Kuziak, Markowskiego (por. Jajuga, Kuziak, Markowski (1997)).

Naturalnym uogólnieniem modelu jest dopuszczenie zmiennych w czasie parametrów modeli (por. rozdział 2.) i analiza zmiennych w czasie wariancji oraz kowariancji. Stosunkowo proste techniki modelowania oraz prognozowania miar zmienności oraz kowariancji i korelacji (mogące znaleźć zastosowanie w analizie portfelowej) oparte są na technikach wygładzania wykładniczego oraz jednorównaniowych modelach *GARCH* (por. Hull (1999), Jorion (2001), w zakresie miar zmienności także rozdział 3.). Przyszłość związana zapewne jednak będzie z wielorównaniowymi modelami *GARCH*, które umożliwiają modelowanie i prognozowanie łącznie całej macierzy kowariancji oraz uwzględnienie wielu występujących w szeregach stóp zwrotu efektów, takich jak, skupianie zmienności, "efekt dźwigni" oraz długa pamięć procesów zmienności (por. rozdział 2.). Jest to jednak zagadnienie na tyle skomplikowane (szczególnie przy próbie modelowania zmian więcej niż 3-4 instrumentów naraz), iż trudno liczyć, iż znajdzie w najbliższym czasie akceptację wśród praktyków, rynek bowiem odrzuca modele zbyt skomplikowane i mało intuicyjne. Niemniej próby takiego opisu współzależności pomiędzy instrumentami i wykorzystania tego do zagadnienia analizy portfelowej znaleźć można w pracy Gouriéroux (por. Gouriéroux (1997)).

¹⁰Drugim podejściem jest poszukiwanie portfela, który maksymalizuje oczekiwaną stopę zwrotu przy zaakceptowanym poziomie ryzyka.

1.5.2. Zmienność a pomiar ryzyka metodą *VaR*

W podrozdziale tym przedstawiona zostanie szerzej koncepcja pomiaru ryzyka metodą *VaR*. Główny nacisk położony zostanie na związek tej miary z koncepcją pomiaru ryzyka za pomocą miar zmienności. Przedstawione zagadnienie obejmować będzie jedynie pomiar *VaR* metodą wariancji-kowariancji. Szczegóły na temat innych podejść znaleźć można w pracach Besta (por. Best (2000)) i Joriona (por. Jorion (2001)).

Zgodnie z przyjętą definicją (por. str. 34):

$$P(W_T \leq W_0 - VaR) = \alpha. \quad (1.23)$$

Zakładając, iż wartość inwestycji W_T na końcu rozpatrywanego horyzontu jest zmienną losową o dystrybuancie $F_{W_T}(\cdot)$, wyrażenie $(W_0 - VaR)$ jest kwantylem rozkładu wartości inwestycji dla prawdopodobieństwa α , co zapisujemy:

$$F_{W_T}^{-1}(\alpha) = W_0 - VaR. \quad (1.24)$$

Nietrudno wykazać, iż odpowiadające prawdopodobieństwu α kwantyle rozkładów stóp zwrotu wynoszą odpowiednio:

- dla prostej stopy zwrotu:

$$F_r^{-1}(\alpha) = \frac{F_{W_T}^{-1}(\alpha) - W_0}{W_0}, \quad (1.25)$$

- dla logarytmicznej stopy zwrotu:

$$F_R^{-1}(\alpha) = \ln \left(\frac{F_{W_T}^{-1}(\alpha)}{W_0} \right). \quad (1.26)$$

Łącząc wzory (1.25), (1.26) ze wzorem (1.24) otrzymujemy wyrażenia uzależniające wielkość *VaR* od kwantyla rozkładu stóp zwrotu:

- dla prostej stopy zwrotu:

$$VaR = -F_r^{-1}(\alpha)W_0, \quad (1.27)$$

- dla logarytmicznej stopy zwrotu:

$$VaR = (1 - \exp(F_R^{-1}(\alpha))) W_0. \quad (1.28)$$

Są to wyrażenia ogólne, a odpowiednie kwantyle rozkładów stóp zwrotu można wyznaczyć poprzez metody historyczne, symulacyjne, czy poprzez dopasowanie rozkładów stóp zwrotu (np. rozkładu normalnego, rozkładu α -stabilnego, czy rozkładu wartości ekstremalnych), czy odpowiednie modele szeregów stóp zwrotu (por. rozdz. 2.).

W ramach dwóch ostatnich podejść możemy wyróżnić tzw. (por. Mc Neil (1999)):

- statyczną analizę ryzyka, w której odpowiedni kwantyl jest funkcją stałej w czasie średniej i odchylenia standardowego rozkładu (przy założeniu, że rozkład posiada skończoną wariancję). Dla kwantyla stopy zwrotu można to zapisać w postaci:

$$F_r^{-1}(\alpha) = \mu - c\sigma, \quad (1.29)$$

gdzie:

μ - średnia rozkładu,

σ - odchylenie standardowe rozkładu,

c - stała zależna od postaci rozkładu stóp zwrotu oraz poziomowi tolerancji VaR ,

- dynamiczną analizę ryzyka, w której posługujemy się warunkowym kwantylem rozkładu stóp zwrotu, będącym funkcją warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowego odchylenia standardowego, **których postać zależy od przyjętego modelu szeregu stóp zwrotu** (por. rozdz. 2):

$$F_{rt}^{-1}(\alpha) = \mu_t - c\sigma_t, \quad (1.30)$$

gdzie:

μ_t - warunkowa oczekiwana stopa zwrotu wyznaczana w chwili t na podstawie przyjętego modelu oraz informacji dostępnej w chwili $(t-1)$,

σ_t - wartość warunkowego odchylenia standardowego stóp zwrotu w chwili t wyznaczana na podstawie przyjętego modelu oraz informacji dostępnej w chwili $(t-1)$,

c - stała zależna od postaci warunkowego rozkładu gęstości stóp zwrotu oraz poziomu tolerancji VaR .

W podejściu statycznym, przy założeniu stałości parametrów modelu w czasie, wartość oczekiwana i odchylenie standardowe rozkładu stóp zwrotu, z którego pochodzą kolejne obserwacje są stałe i nie zależą bezpośrednio od zrealizowanych we

wcześniejszych podokresach stóp zwrotu. W tym kontekście jest to podejście oparte na bezwarunkowej wartości oczekiwanej oraz na bezwarunkowym odchyleniu standardowym. W podejściu dynamicznym, zakłada się, iż w modelu wartości oczekiwanej i/lub wariancji stóp zwrotu oprócz stałych w czasie parametrów modeli występują składniki zależne od wartości zrealizowanych wcześniej stóp zwrotu. W zakresie modelowania wartości oczekiwanej wykorzystuje się najczęściej modele z klasy *ARMA* (por. rozdz. 2.8.), a w zakresie modelowania zmiennej w czasie wariancji procesu - modele klasy *GARCH* (por. rozdz. 2.9.2.). Wyznaczanie wartości oczekiwanej lub wariancji w kolejnym podokresie wymaga w tym przypadku informacji o zrealizowanych w przeszłości stopach zwrotu. W tym znaczeniu prowadzi to do pojęcia warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji. Pojęcia te zostaną jednak wprowadzone w sposób formalny w rozdziale 2.

W ogólnej postaci dla modelu *VaR* opartego na prostych stopach zwrotu otrzymujemy w przypadku podejścia dynamicznego:

$$VaR = (c\sigma_t - \mu_t)W_0 \tag{1.31}$$

Metoda ta pozwala uwzględnić typowe własności obserwowane w szeregach stóp zwrotu, takie jak: autokorelacja, zmienna w czasie wariancja, grube ogony rozkładów.

Niezależnie od przyjętego podejścia, powyższe metody szacowania wielkości wartości zagrożonej wymagają prognozowania czy to bezwarunkowego, czy warunkowego odchylenia standardowego stóp zwrotu.

Prezentowane podejście możliwe jest do zastosowania w odniesieniu zarówno do pojedynczych instrumentów, jak i do portfela instrumentów. Zagadnienie pomiaru ryzyka portfeli wymaga jednak przyjęcia szeregu założeń upraszczających (np. stałości zależności pomiędzy składnikami portfela (por. podrozdz. 1.5.1.), oraz korzystania z wielokrotnie bardziej skomplikowanych modeli wielorównaniowych (por. Gouriéroux (1997), Tsay (2002))). Zawsze można oczywiście potraktować portfel jako całość i modelować stopy zwrotu z całości portfela.

W niniejszej pracy rozważania ograniczone zostaną jedynie do modelowania i prognozowania ryzyka pojedynczego instrumentu.

W rozdziale 2 zaprezentowane zostaną techniki modelowania odpowiednio warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowej zmienności, a także zaprezentowane zostaną możliwe do wykorzystania rozkłady warunkowe. Odpowiednie techniki prognozowa-

nia zmienności na podstawie modeli zaprezentowanych w rozdziale 2 przedstawione zostaną w rozdziale 3. W rozdziale 4 zaprezentowany zostanie natomiast przykład wykorzystania dynamicznych modeli stóp zwrotu do prognozowania zmienności i wyznaczania miary VaR . Zbadana zostanie przydatność różnych modeli w zależności od przyjętych rozwiązań w zakresie modelowania średniej, zmienności, warunkowych rozkładów stóp zwrotu i przede wszystkim przyjętego poziomu tolerancji VaR .

1.5.3. Zmienność a modele wyceny opcji

Chęć opracowania jak najlepszego modelu wyceny opcji była niewątpliwie znaczną siłą napędową rozwoju modeli zmienności instrumentów finansowych i technik prognozowania.

Najprostszym i jednocześnie najpopularniejszym modelem wyceny opcji europejskiej pozostaje model Blacka-Scholesa-Mertona (por. Black, Scholes (1973)) wraz z jego uogólnieniami dla innych prostych instrumentów bazowych (por. Haug (1998)).

U podstaw modeli z klasy Blacka-Scholesa-Mertona leży szereg założeń (por. np. Black, Scholes (1973), Wilmott (1999)), z których najważniejszym jest, z punktu widzenia tej pracy, założenie, iż proces ceny instrumentu bazowego, na który wystawiona jest opcja, jest geometrycznym ruchem Browna (por. str. 61) ze stałym parametrem dryfu i zmienności.

Uogólniona wersja modelu Blacka-Scholesa służąca do wyceny europejskiej opcji kupna wystawionej na akcje, akcje spółek wypłacających w sposób ciągły dywidendę, kontrakty futures i kurs waluty przedstawia się następująco (por. Haug (1998)):

$$c = Se^{(b-r)T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2). \quad (1.32)$$

Natomiast dla europejskiej opcji sprzedaży prawdziwa jest równość:

$$p = Xe^{-rT} N(-d_2) - Se^{(b-r)T} N(-d_1), \quad (1.33)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (1.34)$$

c – wartość europejskiej opcji kupna,

- p – wartość europejskiej opcji sprzedaży,
 S – aktualna cena spot instrumentu bazowego,
 X – cena wykonania opcji,
 r – wolna od ryzyka stopa procentowa (w skali roku),
 T – czas pozostający do wygaśnięcia opcji (wyrażony w latach),
 σ – parametr zmienności, odchylenie standardowe stóp zwrotu instrumentu bazowego (w skali roku),
 b – stopa *cost-of-carry*,
 $N(\cdot)$ – wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego.

Jeśli b będzie równe niżej wymienionym wartościom, to równania (1.32) i (1.33) przedstawiają odpowiednio:

- $b = r$ - model Blacka-Scholesa (1973) wyceny opcji wystawionej na akcje (portfele akcji) spółki nie wypłacającej dywidendy,
- $b = r - q$ - model Mertona (1973) wyceny opcji wystawionej na akcje (portfel akcji) spółek wypłacających dywidendę w sposób ciągły (q - stopa dywidendy),
- $b = 0$ - model Blacka (1976) wyceny opcji wystawionej na kontrakty futures,
- $b = r - r_f$ - model Garmana-Kohlhagena (1983) wyceny opcji wystawionej na kurs waluty (r_f jest zagraniczną wolną od ryzyka stopą procentową).

W najprostszej wersji modelu Blacka-Scholesa, cena opcji zależy od 5 czynników. Spośród tych czynników tylko cena wykonania nie ma charakteru dynamicznego i pozostaje stała przez cały czas ważności instrumentu. Pozostałe czynniki w rzeczywistości zmieniają się w czasie (pomimo, że u podstaw modelu leży założenie zarówno o stałości stóp procentowych, jak i parametru zmienności), lecz wszystkie poza parametrem zmienności (*volatility*) są łatwe do określenia.

Parametr zmienności traktowany jest w modelu jako znany i stały w czasie, a oznacza prognozę zmienności w terminie do wykupu opcji (odpowiednio przeskalowaną na okres roczny). Merton wykazał, że o ile tylko wariancja instrumentu bazowego jest deterministyczną funkcją czasu, może być ona zadana w modelu Blacka-Scholesa poprzez jej średnią wariancję w okresie do wykupu (por. Merton (1973)). Hull i White wykazali, iż ta własność prawdziwa jest także w przypadku pewnych modeli stochastycznej zmienności (por. Hull, White (1987)). Nie zmienia to faktu, iż konieczne jest

prognozowanie parametru zmienności na podstawie modeli szeregów czasowych, czy oszacowań rynkowych (por. rozdz. 3.)

Model Blacka-Scholesa jest modelem popularnym, nie jest jednak pozbawiony wad. Ze względu na nierealistyczne założenia, cechuje się szeregiem obciążeń (por. Hull (1999)) w stosunku do cen rzeczywiście obserwowanych na rynku. Model ten generuje tzw. efekt „uśmiechu zmienności”, czyli źle wycenia opcje nie będące *at-the-money* (por. rozdz. 3.) oraz przy założeniu stałości zmienności w czasie nie uwzględnia różnic w wycenie opcji o różnych terminach wygaśnięcia, wynikających np. z powrotu zmienności do długoterminowej średniej zmienności.

Odpowiedzią było powstanie szeregu modeli wyceny opcji, u podstaw których znajdują się odmienne modele zmian cen instrumentu bazowego. Rozpatruje się zarówno modele z czasem ciągłym, jak i dyskretnym, modele o postaci analitycznej wzoru na wartość opcji, jak i modele, które wykorzystują najczęściej procedury Monte Carlo. W zależności od stopnia skomplikowania, modele te umożliwiają uwzględnienie „efektu uśmiechu zmienności” lub „struktury czasowej”, lub obu tych efektów razem.

Szeroki przegląd modeli wyceny opcji znaleźć można w pracach Batesa (por. Bates (1996), (2002)), Musieli i Rutkowskiego (por. Musiela, Rutkowski (1998)), Hauga (por. Haug (1998)), Weron i Weron (por. Weron i Weron (1998)), Wilmotta (por. Wilmott (1999)), Hafnera i Herwartza (por. Hafner i Herwartz (1999)).

Z punktu widzenia tej pracy, najistotniejszym modelem pozwalającym wycenić opcję z uwzględnieniem specyficznych własności szeregów stóp zwrotu (autokorelacji, skupiania wariancji, efektu dźwigni) jest model wprowadzony przez Duana (por. Duan (1995)), który umożliwia uwzględnienie zarówno efektu „uśmiechu zmienności”, jak i powrotu zmienności do długoterminowej średniej („struktury czasowej zmienności”). Niezbędne modele warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji przedstawione zostaną w rozdziale 2., a przykład empiryczny zastosowania uogólnionego modelu Duana w rozdziale 4.

Rozdział 2.

Modelowanie cen i zmienności

W procesie zarządzania ryzykiem finansowym, analizie podlegają zarówno szeregi czasowe cen¹, jak i szeregi czasowe parametru zmienności².

Modelowania zmienności nie można oddzielić od modelowania poziomów cen, czy stóp zwrotu, gdyż obydwa te modele łącznie decydują o jakości dopasowania danych empirycznych do modelu (modeli).

Rozważania na temat modelowania zmienności instrumentów finansowych rozpocząć należy od zagadnień związanych z modelami zmian cen poszczególnych instrumentów. Początkowo rozważania ograniczone zostaną do zmian cen akcji, indeksów akcji, towarów oraz walut, a następnie rozszerzone zostaną na zmiany stóp procentowych. Przedstawiony zostanie prosty model opisujący zmiany stóp zwrotu, który w dalszej części rozdziału konsekwentnie będzie uogólniany.

Na wstępie warto jednak rozpocząć od przedstawienia podstawowych pojęć związanych z modelowaniem.

2.1. Modelowanie - podstawowe koncepcje

Zgodnie z definicją zawartą w „Słowniku wyrazów obcych” (por. Kamińska-Szmaj (2001)):

¹Często wyróżnia się ściślej szeregi czasowe stóp zwrotu, choć można się zgodzić, iż analizę tych szeregów można utożsamić z analizą odpowiednio przekształconych szeregów cen.

²W przeciwieństwie do szeregów cen, czy stóp zwrotu, modelowany parametr zmienności jest zmienną nie obserwowalną wprost, co znacznie utrudnia jego analizę.

Definicja 2.1.

Modelowanie - to przybliżone odtwarzanie najważniejszych właściwości oryginału, którego celem jest uproszczenie złożonej rzeczywistości pozwalające na poddanie jej procesowi badawczemu, obserwacji, łatwiejszemu zrozumieniu, prognozowaniu itp..

Przez model rozumieć można więc zależności opisujące zjawisko fizyczne albo ekonomiczne (**model matematyczny**) lub możliwie mało skomplikowany, układ względnie odosobniony, działający analogicznie do oryginału, którym może być istota żywa, maszyna, zakład przemysłowy (**model cybernetyczny**) (por. Söderström i Stoica (1997)).

W obszarze zainteresowań tej pracy znajdują się z oczywistych powodów wyłącznie modele matematyczne.

Wyróżnia się dwa sposoby konstruowania modeli matematycznych:

- **modelowanie analityczne**, w którym dynamikę zjawisk lub procesu wyprowadza się najczęściej na podstawie praw określonej nauki (fizyki, chemii, ekonomii),
- **identyfikację systemów**, w której po poddaniu systemu szeregowi doświadczeń, dobiera się parametry modelu w taki sposób, aby model jak najlepiej pasował do danych empirycznych. Jest to podejście czysto eksperymentalne.

Ponieważ w obszarze ekonomii, nie można mówić o zależnościach tak ścisłych jak w szeroko rozumianej fizyce, jedyną analizowaną metodą będą wybrane **modele ekonometryczne** w ramach identyfikacji systemów.

Definicja 2.2.

Model ekonometryczny - jest konstrukcją formalną, przedstawiającą za pomocą jednego równania lub układu równań stochastyczną zależność wyróżnionego zjawiska (ekonomicznego) od innych zjawisk je objaśniających (w tym od przeszłych poziomów samego analizowanego zjawiska) (por. Pawłowski (1978)).

Modele ekonometryczne posiadają odmienne cechy niż uzyskane w procesie modelowania matematycznego. Ich stosowalność nie jest tak ogólna i wykorzystuje się je jedynie w sposób ograniczony do określonego zjawiska. Nie zawsze wyjaśniają one

istotę procesu, gdyż parametry modeli nie zawsze posiadają bezpośrednią interpretację ekonomiczną, a służą jedynie do uzyskania satysfakcjonującej zgodności modelu z danymi eksperymentalnymi.

Istnieje wiele podziałów klasyfikacyjnych modeli (por. Box i Jenkins (1983), Pawłowski (1978), Söderström i Stoica (1997)). Możliwy i zapewne niekompletny jest podział na:

- modele deterministyczne i stochastyczne,
- modele dynamiczne i statyczne,
- modele jednorównaniowe i wielorównaniowe,
- modele liniowe i nieliniowe,
- modele z możliwymi zmiennymi egzogenicznymi i/lub endogenicznymi,
- modele z czasem dyskretnym lub ciągłym,
- modele z sygnałem wyjściowym ciągłym lub dyskretnym.

Wszystkie z wymienionych podziałów są niezależne od siebie i mogą pojawiać się w praktycznie dowolnych kombinacjach.

Powyższy podział omówiony zostanie w kontekście modeli cen i stóp zwrotu oraz parametru zmienności.

Modele deterministyczne i stochastyczne

Spśród wielu możliwych podziałów modeli opisujących zmiany cen na rynkach finansowych rozważa się przede wszystkim podejścia, według których ceny (a tym samym stopy zwrotu) instrumentów finansowych zmieniają się w sposób:

- deterministyczny,
- stochastyczny.

W konsekwencji tego, spośród różnych koncepcji opisu szeregów cen lub stóp zwrotu, rozważa się najczęściej:

- modele wywodzące się z teorii chaosu deterministycznego,
- modele wywodzące się przede wszystkim ze stochastycznych równań różniczkowych lub różnicowych.

Modele chaosu deterministycznego dotarły do współczesnych finansów za pośrednictwem fizyki i po okresie szerokiego zainteresowania i fascynacji takimi pojęciami jak chaos i fraktale (por. np. Peters (1991)) ich popularność zdecydowanie zmalała, szczególnie, że osiągnęte wyniki pozostają dość kontrowersyjne i trudne do interpretacji. Z tych dwóch podejść zdecydowanie częściej wykorzystuje się więc podejście oparte na procesach stochastycznych. Konstruuje się zasygnalizowane wcześniej ekonome-

tryczne modele stochastyczne, które pozwalają wyznaczyć jedynie prawdopodobieństwo, że w wyniku obserwacji danego zjawiska zaobserwujemy wartość z określonego przedziału liczbowego, gdyż wynik jest zmienną losową o określonym rozkładzie. Korresponduje to z szeroko rozpowszechnionym przekonaniem, iż zmiany cen są w dużym stopniu nieprzewidywalne, choć można dopatrzeć się wielu stochastycznych zależności, modelowaniu których poświęcona zostanie dalsza część rozdziału.

W dalszej części pracy rozważane będzie podejście oparte jedynie na metodologii procesów stochastycznych i to dość specyficznej klasy.

W stosunku do modeli zmienności, rozpatrywane będą zarówno modele zmienności oparte na modelach deterministycznych, jak i stochastycznych. Główny nacisk położony będzie jednak na znacznie bardziej popularne modele deterministyczne.

Modele statyczne i dynamiczne

Jeśli w modelu wykorzystuje się jedynie wartości zmiennych objaśniających i objaśnianych z tej samej chwili, to model nazywa się statycznym. Natomiast, gdy w modelu występują zmienne objaśniające i objaśniane opóźnione w czasie, to jest to model dynamiczny.

Proste modele stóp zwrotu (o stałych parametrach) są w tym znaczeniu modelami statycznymi, jednak nie umożliwiają one modelowania obserwowanych własności szeregów finansowych. W niniejszej pracy w miejsce modeli statycznych wprowadzane będą modele dynamiczne i to zarówno w zakresie modelowania wartości oczekiwanej stóp zwrotu, jak i oczekiwanej wariancji procesu.

Modele jednorównaniowe i wielorównaniowe

Za modele jednorównaniowe uznaje się te, w których do opisu zmian zmiennej objaśnianej wystarczy jedno równanie. W konsekwencji tego podziału, wszystkie modele opisujące osobnymi równaniami oczekiwaną stopę zwrotu oraz wariancję stóp zwrotu, uznawane mogą być za modele wielorównaniowe. Jednak o ile przyjmie się założenie, że model oczekiwanej stopy zwrotu oraz model zmiennej w czasie wariancji to osobne modele, wtedy można większość z rozpatrywanych modeli uznać za modele jednorównaniowe. Modelami wielorównaniowymi są według tej konwencji jedynie modele służące do opisu powiązanych zachowań zbioru instrumentów finansowych, np. powiązań kowariancyjnych pomiędzy np. indeksami różnych rynków.

Modele liniowe i nieliniowe

Model nazywany jest liniowym, gdy zmienna objaśniana zależy w sposób liniowy

od zmiennych objaśniających. W przeciwnym razie model uznaje się za nieliniowy. Modele opisujące warunkową wariancję stop zwrotu w zależności od skomplikowania, mogą być zarówno modelami liniowymi, jak i nieliniowymi. Przeważają jednak modele liniowe.

Modele ze zmiennymi egzo- i/lub endogenicznymi

Potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi finansowych szeregów czasowych (stóp zwrotu i zmienności) mogą być odpowiednio zidentyfikowane zmienne egzogeniczne, na przykład poziomy stóp procentowych, kursy walut, towarów, różne zmienne makroekonomiczne (zależy to od analizowanego instrumentu). Wszelkie informacje, które nie zostały wprowadzone do modelu przez zmienne egzogeniczne, agreguje się i wprowadza do modelu jako składnik losowy (zakłócenie). Często zakłada się również, iż zmienne egzogeniczne nie występują w modelu i wprowadza się opóźnione zmienne endogeniczne. Ta sytuacja jest najczęściej rozpatrywana w ramach modeli finansowych szeregów czasowych, zarówno stóp zwrotu, jak i zmienności.

Modele z czasem dyskretnym lub ciągłym

Modele z czasem dyskretnym opisują zmienną objaśnianą w wybranych punktach czasu. W celu ułatwienia analiz, przyjmuje się, że punkty te są równo odległe na osi. Modele z czasem ciągłym opisują zaś zmienną objaśnianą w każdym punkcie czasu. W finansowych szeregach czasowych występuje nieciągła oś czasu, co związane jest z faktem, że ceny podawane są co określony przedział czasu. Najczęściej występującymi szeregami czasowymi są szeregi cen zamknięcia w danym dniu sesyjnym, choć oczywiście zdarzają się też dane o innych częstotliwościach. Szczególnie w ostatnim okresie obserwuje się wzrost zainteresowania szeregami, w których horyzont stóp zwrotu jest mniejszy niż minuta (por. Jajuga (1999b)). Nie zmienia to jednak faktu, że są to nadal szeregi z czasem dyskretnym. Modele z czasem ciągłym mogą mieć natomiast ciekawe własności matematyczne (możliwość wykorzystania aparatu różniczkowego i całkowego) umożliwiające analizę zagadnień, których opis w odniesieniu do czasu dyskretnego jest bardziej skomplikowany. Z punktu widzenia zagadnień finansowych, modele z czasem ciągłym znalazły szczególne zastosowanie przy wycenie opcji (por. Black, Scholes (1973), Weron i Weron (1998)). Jednak od kilku lat dzięki rozwojowi aparatu matematycznego umożliwiającego wycenę opcji modelami czasu dyskretnego umożliwiającymi uwzględnienie skomplikowanych zależności występujących w rzeczywistych szeregach finansowych, takich jak autokorelacja i efekt zmiennej w czasie wariancji procesu (por. np. Hafner i Herwartz (1999)), znaczenie modeli

z czasem ciągłym relatywnie spadło. Modele z czasem dyskretnym są też przede wszystkim prostsze w intuicyjnym zrozumieniu.

Modele zmiennych ciągłych i dyskretnych

Gdy zmienna objaśniana może przyjmować jedynie wartości z przeliczalnego (skończonego lub nieskończonego) zbioru dopuszczalnych wartości, to jest to model zmiennej dyskretnej. W przeciwnym przypadku, gdy zakłada się nieprzeliczalny zbiór wartości zmiennej objaśnianej, jest to model zmiennej ciągłej. Ze względu na specyfikę notowań, polegającą na podawaniu ceny instrumentów finansowych z pewną określoną, zależną od poziomu ceny, dokładnością, naturalnie wydawałoby się przyjęcie modeli dyskretnych. Jednak komplikacje przy analizie takich modeli wzrastają na tyle, że przyjmuje się, iż zarówno ceny, jak i stopy zwrotu mogą przyjmować dowolne wartości. Przyjęcie takiego założenia znacznie upraszcza analizę nie wnosząc znaczącego błędu.

Według powyższej klasyfikacji, w niniejszej pracy wykorzystywane będą modele:

- stochastyczne w zakresie modelowania stóp zwrotu oraz deterministyczne i stochastyczne w zakresie modelowania parametru zmienności,
- dynamiczne,
- jednorównaniowe w stosunku do modelowania stóp zwrotu oraz modelowania zmienności,
- liniowe i nieliniowe,
- jedynie ze zmiennymi endogenicznymi,
- z czasem dyskretnym i ciągłym,
- z ciągłą zmienną objaśnianą.

Zgodnie z przedstawionymi definicjami, celem tego rozdziału będzie próba przekrojowego przedstawienia możliwych modeli opisu zmian cen lub stóp zwrotu instrumentów finansowych. Wyszczególnione modele posłużą w kolejnym rozdziale do przedstawienia technik prognozy parametrów procesów, a te z kolei, do zarządzania ryzykiem na rynkach finansowych.

2.2. Procesy stochastyczne

Zakładając stochastyczny charakter zmian cen oraz decydując się na modelowanie zmian cen za pomocą procesów stochastycznych, niezbędne wydaje się wprowadzenie podstawowych ogólnych wiadomości o procesach stochastycznych.

Aby jednak formalnie zdefiniować proces stochastyczny należy wprowadzić wcześniej podstawowe pojęcia probabilistyczne (por. np. Gajek i Kałużka (2000)).

Definicja 2.3.

Przestrzeń probabilistyczną - nazywamy trójkę uporządkowaną $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\}$, gdzie³:

\mathbf{E} - zbiór zwany przestrzenią wyników doświadczenia lub przestrzenią zdarzeń elementarnych; elementy $e \in \mathbf{E}$ tego zbioru są nazywane wynikami doświadczenia lub zdarzeniami elementarnymi.

\mathbf{B} - rodzina podzbiorów (niekoniecznie wszystkich) zbioru \mathbf{E} , zwanych zdarzeniami losowymi lub krótko zdarzeniami i tworzących sigma ciało.

\mathbf{P} - jest funkcją odwzorowującą zbiór \mathbf{B} w zbiór liczb rzeczywistych z przedziału domkniętego $[0, 1]$, spełniającą aksjomaty:

- $\bigwedge_{\beta \in \mathbf{B}} 0 \leq \mathbf{P}(\beta) \leq 1$,
- $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 1$,
- jest sigma addytywna, tzn. dla każdego przeliczalnego zbioru $\{\beta_n\} \subseteq \mathbf{B}$ zdarzeń parami rozłącznych (spełniających warunek $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), zachodzi równość:

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_n \beta_n\right) = \sum_n \mathbf{P}(\beta_n). \quad (2.1)$$

Funkcja \mathbf{P} wyznacza na zbiorze \mathbf{B} miarę prawdopodobieństwa.

Zbiór \mathbf{E} wyników doświadczenia można odwzorować zgodnie z pewną regułą w zbiór liczb rzeczywistych. Operacja taka określa zmienną losową rzeczywistą, której formalna definicja jest następująca:

³Przestrzeń probabilistyczna jest w rachunku prawdopodobieństwa pojęciem aksjomatycznym.

Definicja 2.4.

Zmienną losową rzeczywistą - nazywamy funkcję $\xi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ odwzorowującą przestrzeń zdarzeń elementarnych w zbiór liczb rzeczywistych i spełniającą warunki:

- $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} e : \xi(e) < x \in \mathbf{B}$,
tzn. dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zbiór zdarzeń elementarnych, dla których zachodzi $\xi(e) < x$ jest zdarzeniem, czyli elementem ciała \mathbf{B} ,
- $\mathbf{P}(e : \xi(e) = -\infty) = \mathbf{P}(e : \xi(e) = \infty) = 0$.

Wartości zmiennej losowej nazywane są realizacjami.

Dysponując pojęciem przestrzeni probabilistycznej i zmiennej losowej można zdefiniować proces stochastyczny.

Niech $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\}$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a \mathbf{T} niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $\mathbf{T} \in \mathbb{R}$.

Definicja 2.5.

Procesem stochastycznym rzeczywistym - nazywamy funkcję $\xi : \mathbf{E} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że dla każdego ustalonego $t \in \mathbf{T}$ funkcja $\xi_t : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zmienną losową rzeczywistą określoną na zbiorze zdarzeń elementarnych \mathbf{E} przestrzeni probabilistycznej $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\}$.

Proces stochastyczny jest więc funkcją dwóch zmiennych $e \in \mathbf{E}$ i $t \in \mathbf{T}$. Każdemu zdarzeniu elementarnemu e i każdemu punktowi t zostaje przyporządkowana liczba rzeczywista $\xi(e, t)$. Zmienna t traktowana jest najczęściej jako zmienna czasowa, a zbiór T nazywany jest zbiorem określoności procesu.

Proces stochastyczny można interpretować na różne sposoby:

- jeśli ustalone zostanie zdarzenie elementarne e , to proces stochastyczny staje się deterministyczną funkcją czasu. Funkcja taka nazywana jest **realizacją procesu stochastycznego**.
- jeśli ustalona zostanie chwila $t \in \mathbf{T}$, to mamy do czynienia ze zmienną losową określaną jako **wartość procesu stochastycznego** w chwili t .

- jeśli ustalone zostanie zarówno zdarzenie $e \in \mathbf{E}$ i chwila $t \in \mathbf{T}$, to określona zostaje liczba rzeczywista (wartość w chwili t konkretnej realizacji procesu).

Ważne jest pojęciowe rozróżnienie procesu stochastycznego i obserwowanego szeregu czasowego. Za szereg czasowy $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ złożony z N kolejnych obserwacji, uważa się więc realizację z nieskończonej populacji takich szeregów czasowych, które mogą być generowane przez proces stochastyczny. W odróżnieniu np. od fizyki, w ekonomii dysponuje się jedynie pojedynczymi realizacjami danych procesów stochastycznych (jedną realizacją cen konkretnego indeksu, waluty lub stopy procentowej). Oznacza to najprościej mówiąc, że eksperyment w naukach ekonomicznych jest niepowtarzalny, co utrudnia analizę szeregów czasowych.

2.3. Modele czasu ciągłego - procesy Itô

Podstawowym rozwiązaniem w zakresie modelowania zmian cen instrumentów finansowych w czasie ciągłym pozostaje niewątpliwie podejście zakładające rozważanie stochastycznych równań różniczkowych (lub powiązanych z nimi równań różnicowych), które są funkcjami o postaci⁴:

$$dX(t) = a(X, t)dt + b(X, t)dB(t), \quad (2.2)$$

gdzie:

t - czas,

$X(t)$ - wartość modelowanej zmiennej w chwili t . W dalszej części pracy, podczas rozpatrywania szeregów dotyczących konkretnych instrumentów, wprowadzone zostaną standardowe oznaczenia pozwalające odróżnić szeregi cen akcji, indeksów, walut, towarów od poziomów stóp procentowych.

$a(X, t)$, $b(X, t)$ - stałe lub funkcje zależne od czasu oraz poziomu procesu,

$dB(t)$ - różniczka stochastyczna procesu Browna.

⁴W tym miejscu analizowane są modele najprostsze, jednorównaniowe, o jednym źródle losowości, co wyklucza w tym przypadku analizę modeli klasy *ARCH* (por. podrozdział 2.9.). Większość modeli z klasy *ARCH* można przedstawić w granicy dla czasu ciągłego, ale już jako dwurównaniowe modele dyfuzji.

Są to procesy określane mianem procesów dyfuzji.

Parametry $a(X_t, t)$ i $b(X_t, t)$ muszą dodatkowo spełniać warunki:

$$P\left(\int_0^t |a(X_u, u)| du < \infty\right) = 1, \quad (2.3)$$

$$P\left(\int_0^t (b(X_u, u))^2 du < \infty\right) = 1. \quad (2.4)$$

Warunkiem początkowym równania (2.2) jest $X(0) = X_0$.

Procesy o powyższej postaci określane są **procesami Itô**.

W dalszej części pracy rozważane będą właśnie procesy Itô oraz ich uogólnienia.

Po prawej stronie równania (2.2) wyróżnić możemy czynnik deterministyczny ($a(X, t)dt$) oraz czynnik odpowiedzialny za losowy charakter zmian cen ($b(X, t)dB(t)$).

Zanim przedstawione zostaną najczęściej spotykane postaci funkcji $a(X_t, t)$ oraz $b(X_t, t)$ przedstawiona zostanie idea różniczki stochastycznej odpowiedzialnej za losowy czynnik w modelu. Kluczową rolę w procesie Itô odgrywa właśnie różniczka stochastyczna $dB(t)$ procesu $B(t)$ zwanego **standardowym procesem Browna**⁵.

Definicja 2.6.

Procesem ruchu Browna - nazywa się proces stochastyczny $\{B(t), t \in \langle 0, \infty \rangle\}$, który spełnia następujące własności:

1. $P(B(0) = 0) = 1$,
2. dla dowolnych chwil: $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, przyrosty $B(t_1) - B(t_0)$, $B(t_2) - B(t_1)$, \dots , $B(t_n) - B(t_{n-1})$ są niezależne⁶.
3. Dla dowolnych chwil t i $\Delta t > 0$ przyrost $B(t+\Delta t) - B(t)$ ma rozkład normalny, którego parametry są następujące:

$$\begin{aligned} E[B(t + \Delta t) - B(t)] &= \mu_B \Delta t, & \mu_B &- \text{to stała rzeczywista,} \\ E[(B(t + \Delta t) - B(t))^2] &= \sigma_B^2 \Delta t, & \sigma_B^2 &- \text{stała dodatnia.} \end{aligned}$$

Stałą μ_B nazywa się współczynnikiem przenoszenia i utożsamia z dryfem, natomiast σ_B^2 jest wariancją procesu.

⁵Zamiennie spotyka się również nazwę **standardowy proces Wienera** (por. Neftci (1996)).

⁶Definicję niezależności procesów stochastycznych znaleźć można np. w pracy Sobczyk (por. Sobczyk (1996))

Najczęściej w modelowaniu wykorzystuje się jednak szczególny przypadek procesu (ruchu) Browna, tzw. **standardowy (standaryzowany) proces Browna**.

Definicja 2.7.

Standardowym procesem Browna - nazywa się proces określony definicją (2.6.), dla którego $\mu_B = 0$ oraz $\sigma_B^2 = 1$.

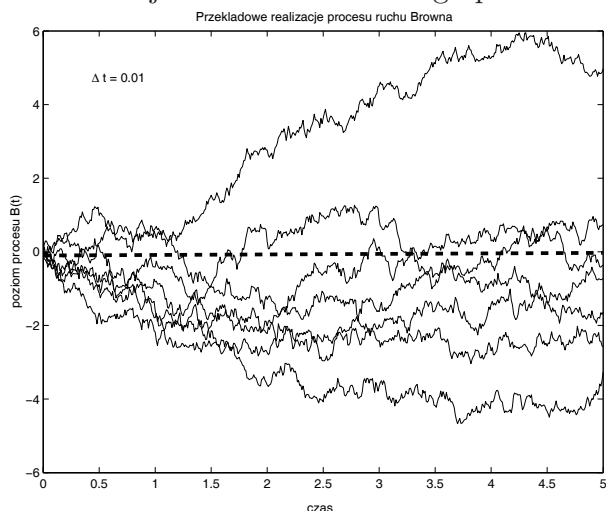
Różniczkę stochastyczną $dB(t)$ uzyskuje się z przyrostów standaryzowanego procesu Browna, gdy $\Delta t \rightarrow 0$.

Podstawowe własności standardowego procesu Browna są następujące (por. np. Weron i Weron (1998)):

1. $B(t)$ ma prawie wszystkie realizacje ciągłe,
2. prawie wszystkie realizacje $B(t)$ są nieróżniczkowalne dla każdego punktu czasu,
3. $B(t)$ jest procesem o przyrostach stacjonarnych i niezależnych,
4. przyrosty $dB(t)$ mają na mocy definicji (2.6.) oraz (2.7.) rozkład normalny $N(0, dt)$,
5. rozkłady warunkowe $B(u)$ przy danym $B(t)$ są rozkładami normalnymi $N(B(t), u-t)$, dla $u > t$,
6. wariancja $\text{var}[B(t)] \rightarrow \infty$, gdy $u \rightarrow \infty$.

Na rysunku 2.1. zaprezentowane zostały przykładowe trajektorie procesów przybliżających standardowy ruch Browna dla $\Delta t = 0.001$.

Rysunek 2.1: Trajektorie standardowego procesu Browna



Źródło: opracowanie własne.

Zanim przedstawione zostaną szczegółowo najczęściej rozważane postaci wzoru (2.2) niezbędne jest wprowadzenie **lematu Itô**, określającego reguły różniczkowania funkcjonałów procesów Itô⁷ (por. Weron i Weron (1998), Wilmott (1999)).

Dla uproszczenia zapisu, przyjęto w niektórych wzorach konwencję $X_t = X(t)$.

Definicja 2.8.

Lemat Itô

Niech proces $Y(t)$ będzie związany z procesem Itô $X(t)$ funkcją $U(t, X_t)$, tzn. $Y(t) = U(t, X_t)$, gdzie $U : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ posiada ciągłą drugą pochodną cząstkową.

Różniczka stochastyczna $dY(t)$ spełnia wtedy równanie:

$$dY_t = L^0 U(t, X_t) dt + L^1 U(t, X_t) dB_t, \quad (2.5)$$

gdzie operatory L^0 i L^1 zdefiniowane są w następujący sposób:

$$L^0 U = \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad L^1 U = b \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Wzór Itô może być również interpretowany jako stochastyczne równanie całkowe:

$$Y_t = Y_{t_0} + \int_{t_0}^t L^0 U(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t L^1 U(s, X_s) dB_s. \quad (2.7)$$

⁷Najczęściej rozważany funkcjonal procesu Itô ma postać $Y(t) = \ln(X(t))$, co związane jest z modelowaniem ciągłej stopy zwrotu.

Postać lematu Itô dana wzorem (2.5) jest jednak zdecydowanie bardziej popularna.

W dalszej części pracy rozważane będą przede wszystkim procesy Itô dane wzorem (2.2) o następującej ogólnej postaci czynnika związanego z dryfem procesu oraz z czynnikiem stochastycznym:

$$a(X_t, t) = \eta(\bar{X} - X(t)^\beta), \quad b(X_t, t) = \sigma X(t)^\gamma. \quad (2.8)$$

Korzystając z wzoru (2.2) uzyskujemy następującą postać rozważanego procesu⁸:

$$dX(t) = \eta(\bar{X} - X(t)^\beta)dt + \sigma X(t)^\gamma dB(t) \quad (2.9)$$

gdzie:

$X(t)$ - poziom procesu w chwili t ,

\bar{X} - stała utożsamiana z długoterminową średnią wyrażenia $X(t)^\beta$, ($X(t)^\beta \geq 0$).

Dla $\beta = 1$ jest to długoterminowa średnia procesu $X(t)$.

σ - parametr odpowiedzialny za wielkość wpływu czynnika losowego. W szerokim rozumieniu parametr ten określa się zmiennością procesu⁹.

β, γ - parametry procesu.

Jest to postać bardzo ogólna, która zawiera w sobie wiele prostszych, popularnych modeli. W tabeli 2.1 przedstawione zostaną najpopularniejsze, spotykane w literaturze, procesy zawierające się w procesie danym wzorem (2.9). Parametry procesów mogą być zarówno stałymi, jak i funkcjami czasu. Obok wzorów podane zostały odniesienia literaturowe.

⁸Alternatywnie spotyka się postać $dX(t) = (\phi - \psi X(t)^\beta)dt + \sigma X(t)^\gamma dB(t)$, gdzie poziom średni procesu wyznacza zależność $\bar{X} = \phi/\psi$.

⁹W wąskim rozumieniu (najczęściej spotykanym) parametr ten nazywa się zmiennością, gdy proces $X(t)$ modeluje proste bądź logarytmiczne stopy zwrotu (patrz geometryczny ruch Browna).

Tabela 2.1: Modele czasu ciągłego

M.1.	$dX = \mu dt + \sigma dB$ $\eta = -\mu, \bar{X} = 0, \beta = 0, \gamma = 0$	Bachelier (1900), Merton (1974) (arytmetyczny ruch Browna)
M.2.	$dX = \mu X dt + \sigma X dB$ $\eta = -\mu, \bar{X} = 0, \beta = 1, \gamma = 1$	Osborne (1959), Samuelson (1965), Black, Scholes (1973), Rendleman Bartter (1980) (geometr. ruch Browna)
M.3.	$dX = \mu X dt + \sigma dB$ $\eta = -\mu, \bar{X} = 0, \beta = 1, \gamma = 0$	Cox i Ross (1976)
M.4.	$dX = \mu X dt + \sigma \sqrt{X} dB$ $\eta = -\mu, \bar{X} = 0, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}$	Cox i Ross (1976)
M.5.	$dX = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma dB$ $\beta = 1, \gamma = 0$	Vasicek (1977), Hull i White (1990)
M.6.	$dX = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma \sqrt{X} dB$ $\beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}$	Cox, Ingersoll, Ross (1985)
M.7.	$dX = \eta(\bar{X} - X)dt + \sigma X dB$ $\beta = 1, \gamma = 0$	(por. Penza (2001))

Źródło: opracowanie własne.

Modele powyższe oczywiście nie wyczerpują szerokiej gamy rozważanych w literaturze modeli. Są to jednak modele najczęściej rozważane z powodu ich własności umożliwiających uwzględnienie w sposób dość dobry podstawowych własności finansowych szeregów czasowych, a także (a może przede wszystkim) pozwalających na stosunkowo prostą implementację tych modeli w procesie zarządzania ryzykiem finansowym. Same, jak najskuteczniejsze nawet modelowanie szeregów finansowych jest oczywiście ciekawe, lecz z praktycznego punktu widzenia wygrywają i stają się najbardziej popularne te modele, które można później zastosować podczas analizy portfelowej, pomiaru ryzyka metodą *VaR*, a także w procesie wyceny opcji oraz w procesie zabezpieczania instrumentów bazowych instrumentami pochodnymi i vice versa. Nie wszystkie te modele stały się więc popularne w równym stopniu.

Ogólnie powyższe modele można podzielić na modele, w których nie obserwuje się własności powrotu do średniej (modele od M.1. do M.4.) oraz modele z poziomem procesu powracającym do średniej (*mean reverting processes*) (modele od M.5. do M.7.). Modele bez powrotu do średniej służą do modelowania cen akcji oraz indeksów akcji,

natomiast modele z powrotem do średniej wykorzystywane są przede wszystkim do modelowania zachowania stóp procentowych. Ceny walut oraz cen towarów modelowane są zarówno przez modele z powrotem do średniej, jak i bez powrotu. Kryterium wyboru w tym przypadku jest sygnalizowany wcześniej cel modelowania. W przypadku modelowania cen towarów i walut, aby wycenić opcję wystawioną na towar lub walutę, wybiera się model bez powrotu do średniej (czasami nie będący najlepszym modelem z punktu widzenia dopasowania do danych empirycznych) pozwalający jednak w prosty sposób wycenić opcję poprzez zastosowanie modelu Blacka-Scholesa (por. Black, Scholes (1973)), natomiast dążąc do oszacowania ryzyka metodą *VaR* możliwe jest stosunkowo łatwe skorzystanie z modeli z powrotem do średniej, o ile rzeczywiście własność ta jest obserwowana w danym szeregu czasowym.

Fakt, w jaki sposób bardziej skomplikowane modele wyceny opcji wpływają na wybór modeli opisujących zmiany cen instrumentów podstawowych, możemy zaobserwować także w modelach od M.2. do M.3., w których współczynnik $\beta = 1$. Pozwala to w stosunkowo łatwy sposób zastosować teorię braku arbitrażu i martyngałów (por. Hull (1999), Weron i Weron (1998), Wilmott (1999)) do wyceny opcji.

Warto dodatkowo zauważyć, że najczęściej używane w modelowaniu zmian cen akcji modele od M.2. do M.4. zawierają się w modelu *Constant Elasticity of Variance* (CEV) zaproponowanym przez Coxa (por. Cox (1975)). Natomiast modele od M.5. do M.7. służące do modelowania natychmiastowej stopy procentowej oraz (szczególnie model M.5.) do modelowania zmian cen towarów (np. cen energii (por. Blanco, Soronow (2001)) zawierają się w ogólniejszym modelu zaproponowanym przez Chana, Karolyi, Longstaffa i Sandersa (por. Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders (1992)).

Poniżej przedstawione zostaną szczególnie ważne, najczęściej rozważane postaci wzoru (2.9) oraz ich własności.

Arytmetyczny ruch Browna

Proces zwany arytmetycznym ruchem Browna uzyskujemy przy założeniu, że współczynniki $a(X_t, t)$ oraz $b(X_t, t)$ są stałymi:

$$a(X_t, t) = \mu, \quad b(X_t, t) = \sigma. \quad (2.10)$$

Równanie (2.2) przyjmuje wtedy postać modelu M.1.:

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t). \quad (2.11)$$

Proces arytmetycznego ruchu Browna posiada następujące własności:

1. proces może przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne,
2. przy danym $X(t)$, dla chwili $T > t$:
 - rozkład warunkowy zmiennej $X(T)$ jest rozkładem gaussowskim o wartości oczekiwanej $X(t) + \mu(T - t)$ oraz wariancji $\sigma^2(T - t)$,
 - wariancja $\text{var}(X(T)) \rightarrow \infty$, gdy $T \rightarrow \infty$,
3. proces nie posiada skoków oraz nieciągłości.

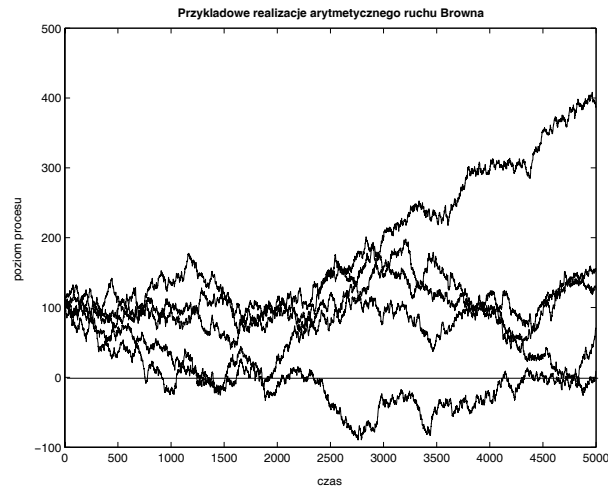
W klasycznym (tj. ze stałymi w czasie parametrami μ oraz σ) arytmetycznym ruchu Browna ceny wahają się więc wokół trendu, który określa współczynnik μ . Siła wahań jest stała w czasie i zależy od współczynnika σ .

Oczekiwane stopy zwrotu są coraz mniejsze (większe), ponieważ oczekiwana zmiana ceny jest stała, a poziom ceny wzrasta (maleje) wokół trendu, gdy współczynnik μ jest dodatni (ujemny).

Arytmetyczny ruch Browna (oraz procesy stanowiące jego uogólnienie, nie narzucające warunku, że parametry procesu są stałymi) służą najczęściej do modelowania poziomów stóp procentowych, a także (ale zdecydowanie rzadziej) cen towarów oraz walut.

Na rysunku 2.2. przedstawione zostały przykładowe trajektorie arytmetycznego ruchu Browna. Zaprezentowany został podstawowy mankament arytmetycznego ruchu Browna, czyli fakt, że proces może przyjmować wartości ujemne, co w modelowaniu cen oraz stóp procentowych jest cechą niepożądaną.

Rysunek 2.2: Trajektorie arytmetycznego ruchu Browna



Źródło: opracowanie własne.

Geometryczny ruch Browna

Proces zwany geometrycznym ruchem Browna uzyskuje się przy założeniu, że współczynniki $a(X_t, t)$ oraz $b(X_t, t)$ mają następującą postać:

$$a(X_t, t) = \mu X(t), \quad b(X_t, t) = \sigma X(t) \quad (2.12)$$

Równanie (2.2) przyjmuje wtedy postać modelu M.2.:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t) \quad (2.13)$$

Proces geometrycznego ruchu Browna posiada następujące własności:

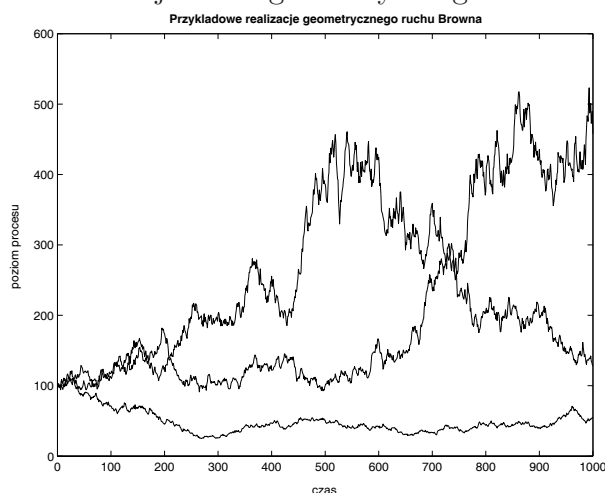
1. proces może przyjmować wartości nieujemne lub niedodatnie w zależności od znaku wartości, od której startuje. W modelowaniu procesów finansowych punkt startowy procesu jest dodatni i wtedy proces pozostaje nieujemny.
2. o ile proces osiągnie wartość zero, to jego wartość pozostaje równa zero, tzn. proces posiada tzw. barierę absorbującą w zerze,
3. przy danym $X(t)$ dla $T \geq t$:
 - rozkład warunkowy zmiennej $X(T)$ jest rozkładem log-normalnym o wartości oczekiwanej $X(t) \exp(\mu(T - t))$,
 - wariancja $\text{var}(X(T)) \rightarrow \infty$, gdy $T \rightarrow \infty$.

Jak łatwo zauważyć na podstawie postaci procesu oraz powyższych własności, zarówno wielkość trendu, jak i wahania poziomu cen zależą od poziomu procesu. Poziom cen waha się wokół trendu wykładniczego, a wielkość wahań cen jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z poziomu procesu.

Geometryczny ruch Browna (oraz procesy stanowiące jego uogólnienie, nie narzucające warunku, że parametry procesu są stałymi) służą do modelowania przede wszystkim cen akcji, indeksów akcji oraz (gdy nie jest konieczne uwzględnienie efektu powrotu do średniej) cen towarów, walut, a także sporadycznie poziomów stóp procentowych.

Na rysunku 2.3 przedstawione zostały przykładowe trajektorie geometrycznego ruchu Browna.

Rysunek 2.3: Trajektorie geometrycznego ruchu Browna



Źródło: opracowanie własne.

Warto w tym miejscu przedstawić odmiennie zapisaną postać wzoru (2.13):

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dB(t) \quad (2.14)$$

Można zauważyć, iż odmiennie niż arytmetyczny ruch Browna, proces geometrycznego ruchu Browna modeluje przyrosty względne procesu, a tym samym może być wykorzystany wprost do modelowania stóp zwrotu, co stanowi właśnie o ogromnej popularności tego modelu w odniesieniu do cen akcji, towarów, jak i kursów walut.

Dodatkowo popularność modelu spowodowana jest faktem, że to właśnie ten model pozwolił w 1973 roku Blackowi, Scholesowi i Mertonowi (por. Black, Scholes (1973)) wyprowadzić wzór na cenę europejskiej opcji kupna wystawionej na akcje spółki nie

wypłacającej dywidendy¹⁰. I to właśnie model wyceny opcji, za który zresztą w 1997 roku Merton oraz Scholes otrzymali Nagrodę Nobla z dziedziny nauk ekonomicznych, stał się również siłą napędową popularności geometrycznego ruchu Browna. Zakładając stałość parametrów procesu w czasie, uzyskujemy (odmiennie niż dla arytmetycznego ruchu Browna) stałość oczekiwanej stopy zwrotu niezależnie od poziomu procesu.

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w rozdziale 1., można rozważać tzw. prostą bądź logarytmiczną stopę zwrotu. Dla nieskończenie krótkich horyzontów stóp zwrotu otrzymuje się dla geometrycznego ruchu Browna:

dla prostej stopy zwrotu

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X(t)} = \frac{dX(t)}{X(t)} \quad (2.15)$$

dla logarytmicznej stopy zwrotu

$$\begin{aligned} R(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \ln \left(\frac{X(t + \Delta t)}{X(t)} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\ln(X(t + \Delta t)) - \ln(X(t)) \right) \\ &= d \ln(X(t)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na podstawie wzoru (2.15) widać więc, że proces geometrycznego ruchu Browna modeluje prostą stopę zwrotu. W modelu tym oczekiwana średnia stopa zwrotu dla horyzontu dt wynosi μdt , zaś wariancja stóp zwrotu wynosi $\sigma^2 dt$.

Do prawidłowego wyznaczenia postaci procesu opisującego logarytmiczne stopy zwrotu niezbędne jest skorzystanie z zaprezentowanego wcześniej lematu Itô. W tym przypadku, rozważany funkcjonal procesu Itô ma postać $Y(t) = \ln(X(t))$. Wyznaczając niezbędne pochodne cząstkowe występujące we wzorze (2.5) otrzymuje się:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{X}, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = -\frac{1}{X^2}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

¹⁰W kolejnych latach wyprowadzone zostały modele oparte na geometrycznym ruchu Browna dla akcji wypłacających dywidendy, walut, kontraktów terminowych (por. Haug (1998), Hull (1999)).

Na mocy powyższego lematu, uzyskuje się następującą postać procesu modelującego logarytm ceny:

$$d(\ln X(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB(t) \quad (2.18)$$

Na podstawie wzoru (2.16) można stwierdzić, iż wzór (2.18) modeluje logarytmiczną stopę zwrotu.

Jak łatwo zauważyć, o ile procesem ceny jest geometryczny ruch Browna, to logarytm ceny modelowany jest przez proces arytmetycznego ruchu Browna.

Procesy z efektem powrotu do średniej

Najprostszy model z własnością powrotu procesu do średniej uzyskuje się przy założeniu, że współczynniki $a(X_t, t)$ oraz $b(X_t, t)$ mają następującą postać:

$$a(X_t, t) = \eta(\bar{X} - X(t)), \quad b(X_t, t) = \sigma \quad (2.19)$$

Równanie (2.2) przyjmuje wtedy postać modelu M.5.:

$$dX(t) = \eta(\bar{X} - X(t))dt + \sigma dB(t) \quad (2.20)$$

Tak zdefiniowany proces z powrotem do średniej posiada następujące własności:

1. proces może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne, co jest niewątpliwie wadą tego modelu,
2. proces waha się wokół średniej (horyzontalnego trendu), a szybkość powrotu do średniej uzależniona jest od współczynnika η ($\eta \geq 0$) oraz od odległości procesu od średniej. O ile poziom procesu $X(t)$ znajduje się poniżej średniej \bar{X} , to wyrażenie $\eta(\bar{X} - X(t))$ jest większe od zera i oczekiwana zmiana procesu jest dodatnia, co skutkuje oczekiwanym powrotem do średniej¹¹. Analogicznie, gdy poziom procesu znajduje się powyżej średniej, oczekiwana zmiana procesu jest ujemna i proces także powraca do średniej.
Wobec efektu powrotu do średniej, wahania wokół poziomu średniego nie są przypadkowe.

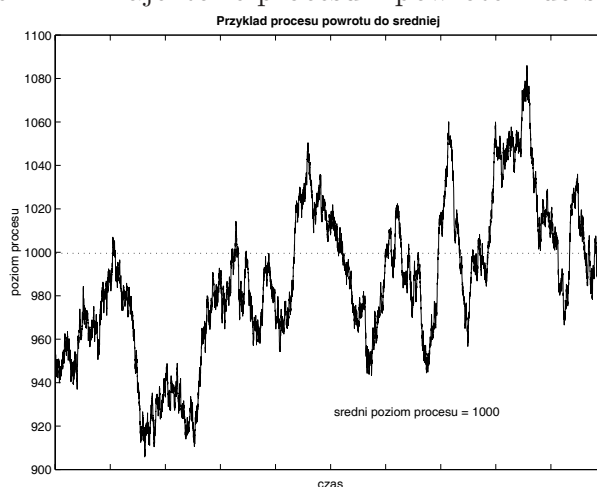
3. siła wahań wokół średniej nie zależy od poziomu procesu

¹¹Można mówić jedynie o oczekiwanym powrocie do średniej, ponieważ czynnik losowy może mimo wszystko nadal powodować oddalanie procesu od średniej.

Proces dany wzorem (2.20) oraz procesy stanowiące jego uogólnienie, nie narzucające warunku, że parametry procesu są stałymi, służą do modelowania przede wszystkim cen towarów (o ile nie są to towary rolnicze lub energia, których ceny charakteryzuje się dodatkowo wahaniami sezonowymi) oraz poziomów stóp procentowych.

Na rysunku 2.4. przedstawione zostały przykładowe trajektorie procesu z efektem powrotu do średniej. W tym przypadku proces powraca do poziomu równego 1000.

Rysunek 2.4: Trajektorie procesu z powrotem do średniej.



Źródło: opracowanie własne.

Wady, iż proces może przyjmować wartości ujemne, pozbawiony jest przy pewnych założeniach model oznaczony jako M.6. oraz całkowicie model M.7. W obydwu tych modelach, im niższy poziom procesu, tym mniejszy wpływ czynnika losowego (gdyż stały współczynnik σ mnożony jest jeszcze przez \sqrt{X} lub X) na zmianę ceny, który może powodować, iż proces oddali się od średniej tak daleko, że osiągnie poziom zerowy.

Dla procesu M.6. możliwe jest podanie warunku, jaki muszą spełniać parametry modelu, by proces pozostawał dodatni. O ile parametry procesu spełniają warunek:

$$\frac{2\eta\bar{X}}{\sigma^2} \geq 1 \quad (2.21)$$

to proces pozostaje zawsze dodatni (por. Wilmott (1999)).

Modele M.6. oraz M.7. najczęściej służą do opisu zachowań stóp procentowych.

Podsumowując stwierdzić należy jednak, iż nie ma zwykle jednoznacznej odpowiedzi, który z procesów należy stosować. Ostateczny wybór modelu

nie jest sprawą oczywistą. Zwykle jest to kompromis pomiędzy dopasowaniem modelu do danych empirycznych (większa ogólność modelu, to potencjalnie lepsze dopasowanie modelu do danych, ale też wzrost problemów z estymacją parametrów, szczególnie w przypadku niewielkiej liczby obserwacji) oraz pomiędzy własnościami modelu i możliwością wykorzystania go na przykład w bardziej skomplikowanych modelach wyceny instrumentów dłużnych, czy pochodnych.

2.4. Modele z czasem dyskretnym

Powyższe rozważania dotyczyły modeli z czasem ciągłym, co jest naturalnym założeniem dla procesów Itô. Jest to podejście bardzo wygodne ze względu na stosunkowo dobrze już rozwinięty aparat matematyczny umożliwiający wycenę zarówno prostych, jak i skomplikowanych w swej strukturze instrumentów pochodnych. Jednak w rzeczywistości nie dysponuje się ciągłymi szeregami czasowymi. Czas pomiędzy poszczególnymi „odczytami” cen wynosi najczęściej w finansowych szeregach czasowych jeden dzień sesyjny (zazwyczaj analizuje się ceny zamknięcia rynku w poszczególnych dniach sesyjnych), choć w ostatnim okresie zauważa się znacznie zwiększone zainteresowanie danymi o większej częstotliwości notowań¹². Nie zmienia to jednak faktu, że takie szeregi czasowe analizuje się posługując czasem dyskretnym.

Niezbędna staje się wówczas umiejętność przybliżania procesów z czasem ciągłym procesami o czasie dyskretnym. Najczęściej wykorzystywanymi podejściami stają się wówczas metody aproksymacyjne zwane **schematem Eulera** oraz **schematem Milsteina**. Schemat Eulera jest najczęściej wykorzystywaną (bo najprostszą i najbardziej intuicyjną) metodą przybliżania procesów Itô dla czasu dyskretnego (por. Göing (1996), Sobczyk (1996)).

Poniżej przedstawione zostaną podstawowe informacje o przybliżaniu procesów czasu ciągłego, procesami z czasem dyskretnym, co wpływa zarówno na techniki estymacji parametrów procesu, jak i techniki generowania trajektorii procesu. Poprawa skuteczności technik generowania trajektorii procesów cen, ma zasadnicze znaczenie we wszelkich przypadkach, w których wykorzystuje się podejście *Monte Carlo* w inżynierii finansowej, a więc m.in. w technikach wyznaczania *VaR* metodami symulacyj-

¹²Rozważa się nawet szeregi z kilkunastosekundowymi odstępami pomiędzy poszczególnymi obserwacjami.

nymi, w symulacyjnych technikach wyceny instrumentów pochodnych, zarówno tych prostych, jak i przede wszystkim tych, których funkcja wypłaty uzależniona jest od poziomu cen w okresie do wygaśnięcia opcji.

Definicja 2.9.

Schemat Eulera

Niech $X = \{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ będzie procesem Itô dla czasu ciągłego określonym równaniem (2.2).

Niech t_n ($n=0, \dots, N$) oznacza równo oddalone punkty czasu $t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$.

Proces $X(t)$ można przybliżyć w punktach t_n procesem $Y(t_n)$ w następujący sposób:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n, t_n)(t_{n+1} - t_n) + b(Y_n, t_n)(B_{t_{n+1}} - B_{t_n}), \quad (2.22)$$

gdzie:

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

$$Y_n = Y(t_n), B_{t_n} = B(t_n).$$

Najczęściej przyjmuje się dodatkowo:

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n = \text{const} \quad (2.23)$$

$$\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n} \quad (2.24)$$

W celu uproszczenia zapisu przyjmuje się:

$$a = a(Y_n, t_n), \quad b = b(Y_n, t_n) \quad (2.25)$$

Schemat Eulera można zapisać wtedy w skróconej formie jako:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta B_n \quad (2.26)$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Z przybliżaniem procesów czasu ciągłego procesami z czasem dyskretnym związane jest pojęcie **silnej zbieżności** (por. Göing (1996)).

Definicja 2.10.

Proces Y_n określony definicją (2.9.) z maksymalnym odcinkiem czasu Δ **zbiega silnie** do procesu $X(t)$ w chwili $T = t_N$ o ile:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E(|X(T) - Y_N|) = 0. \quad (2.27)$$

Proces z czasem ciągłym X oraz z czasem dyskretnym Y zbiegają się silnie do siebie, o ile wraz ze zmniejszaniem odcinka czasu pomiędzy kolejnymi obserwacjami procesu Y , różnica bezwzględna pomiędzy wartościami procesu X i Y maleje.

Zbieżność procesów $X(t)$ oraz Y_n określa współczynnik zwany **rzędem zbieżności** (*order of strong convergence*).

Definicja 2.11.

Proces Y_n określony definicją (2.9.) z maksymalnym odcinkim czasu Δ , posiada silną zbieżność do procesu X rzędu $\gamma > 0$ w chwili $T = t_N$, o ile istnieje stała $C > 0$, niezależna od Δ oraz stała $\Delta_0 > 0$ takie, że:

$$\bigwedge_{\Delta \in (0, \Delta_0)} E(|X(T) - Y_N|) = C\Delta^\gamma \quad (2.28)$$

Dla procesu Itô schemat Eulera posiada zbieżność rzędu $\gamma = 0.5$ (por. Göing (1996)).

W przypadku, gdy $b(X_t, t)$ jest funkcją X_t (np. tak, jak dla geometrycznego ruchu Browna), taka zbieżność może być niewystarczająca (por. Sobczyk (1996)). Można zastosować udoskonalenie metody Eulera zwane **schematem Milsteina**¹³.

Definicja 2.12.

Schemat Milsteina - (w skróconej notacji) dany jest następującym równaniem:

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_n + b\Delta B_n + \frac{1}{2} b \frac{\partial b}{\partial y} [(\Delta B_n)^2 - \Delta_n] \quad (2.29)$$

Dodanie do schematu Eulera czynnika $0,5b\frac{\partial b}{\partial y}[(\Delta B_n)^2 - \Delta_n]$ powoduje wzrost rzędu zbieżności¹⁴ procesów Y_n oraz $X(t)$ z $\gamma = 0.5$ do $\gamma = 1.0$.

Odpowiedni przykład zaprezentowany został w dalszej części pracy na rysunku 2.5. (na stronie 71).

Poniżej przedstawione zostaną zastosowania schematu Eulera oraz Milsteina do dyskretyzacji czasu w podstawowych modelach zaprezentowanych we wcześniejszej części pracy.

¹³Spotykana jest również pisownia „Milshtein” tego rosyjskiego nazwiska.

¹⁴W przypadku, gdy $b(X_t, t) = b(t)$, już schemat Eulera posiada rząd zbieżności $\gamma = 1$ i stosowanie schematu Milsteina jest zbędne.

Zgodnie z definicją ruchu Browna:

$$\Delta B \sim N(0, \Delta t). \quad (2.30)$$

Jeśli Δt jest stała, uzyskuje się następującą dyskretną (co do czasu) aproksymację przyrostów standardowego procesu ruchu Browna:

$$\Delta B = \sqrt{\Delta t} z_t, \quad z_t \sim N(0, 1). \quad (2.31)$$

Poniżej, korzystając z lematu Itô, schematów Eulera i Milsteina oraz wzoru (2.31), przedstawione zostaną metody generowania trajektorii wyróżnionych wcześniej procesów. Technika generowania trajektorii zaprezentowana zostanie na modelach arytmetycznego (2.11) i geometrycznego ruchu Browna (2.13) oraz na modelu Coxa, Ingersolla i Rossa (model M.6.).

Z zagadnieniem tym związane są również modele zwane modelami drzew dwumianowych wprowadzone przez Coxa, Rossa i Rubinsteina (por. Cox, Ross, Rubinstein (1979)) oraz drzew trójmianowych wprowadzonych przez Boyle'a (por. Boyle (1986)). W modelu dwumianowym przyszła cena (cena w kolejnym węźle drzewa) może z odpowiednio zadaniem prawdopodobieństwem wzrosnąć lub spaść o zadaną wartość. Prawdopodobieństwo skoku w górę, jak i w dół oraz wielkość skoku wyznaczane są na podstawie danych historycznych. W drzewach trójmianowych cena w kolejnym węźle może również nie ulec zmianie. Ponieważ koncepcja drzew zaproponowana została właściwie bardziej w celu ułatwienia wyceny opcji (w tym przede wszystkim opcji amerykańskich i egzotycznych) niż modelowania zmian cen (na podstawie drzew nie wyznacza się trajektorii procesów), nie będzie rozważana w tej pracy. Przykłady zastosowania drzew dwumianowych i trójmianowych znaleźć można na przykład w pracach Hauga (por. Haug (1998)) oraz Hulla (por. Hull (1999)).

W modelu arytmetycznego ruchu Browna czynnik b nie zależy od poziomu procesu, więc schemat Eulera i schemat Milsteina są tożsame. Przybliżenie procesu jest więc następujące:

$$\Delta X = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z_t \quad (2.32)$$

lub inaczej:

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z_t. \quad (2.33)$$

Schemat Eulera prowadzi do następującej aproksymacji modeli geometrycznego ruchu Browna:

$$\Delta X = \mu X \Delta t + \sigma X \sqrt{\Delta t} z_t, \quad (2.34)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \mu X \Delta t + \sigma X \sqrt{\Delta t} z_t \quad (2.35)$$

oraz modelu Coxa, Ingersolla i Rossa:

$$\Delta X = \eta(\bar{X} - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{X}\sqrt{\Delta t}z_t, \quad (2.36)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \eta(\bar{X} - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{X}\sqrt{\Delta t}z_t. \quad (2.37)$$

W modelu geometrycznego ruchu Browna oraz w modelu Coxa, Ingersolla, Rossa czynnik b jest funkcją poziomu procesu ($b(X_t, t) = \sigma X$ oraz $b(X_t, t) = \sigma\sqrt{X}$), możliwe jest więc uzyskanie lepszego przybliżenia procesu stosując schemat Milsteina.

Odpowiednio dla geometrycznego ruchu Browna oraz dla modelu CIR wymagane pochodne cząstkowe są następujące:

$$\frac{\partial b}{\partial X} = \sigma, \quad \frac{\partial b}{\partial X} = \frac{1}{2}\sigma X^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

Przybliżenia procesów według schematu Milsteina dane są następującymi zależnościami:

- dla geometrycznego ruchu Browna:

$$\Delta X = \mu X \Delta t + \sigma X \sqrt{\Delta t} z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X (\Delta t z_t^2 - \Delta t), \quad (2.39)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \mu X \Delta t + \sigma X \sqrt{\Delta t} z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X (\Delta t z_t^2 - \Delta t), \quad (2.40)$$

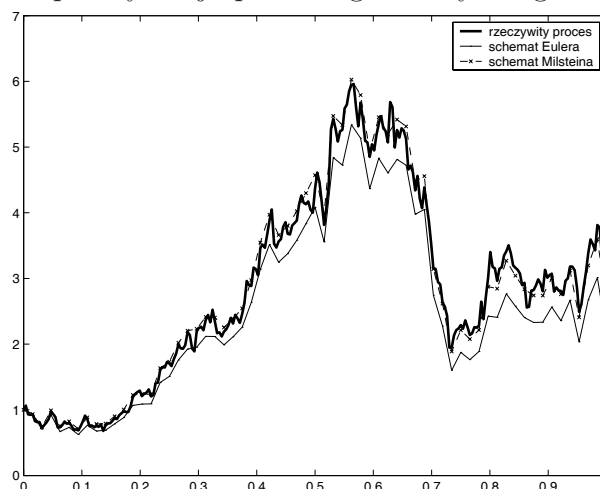
- dla procesu CIR:

$$\Delta X = \eta(\bar{X} - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{X}\sqrt{\Delta t}z_t + \frac{1}{4}(\Delta t z_t^2 - \Delta t), \quad (2.41)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \eta(\bar{X} - X_t)\Delta t + \sigma\sqrt{X}\sqrt{\Delta t}z_t + \frac{1}{4}(\Delta t z_t^2 - \Delta t). \quad (2.42)$$

Na rysunku 2.5. przedstawiony został przykład przybliżenia rozwiązania geometrycznego ruchu Browna procesami z czasem dyskretnym uzyskanymi według schematu Eulera oraz schematu Milsteina. Zgodnie z oczekiwaniami, aproksymacja schematem Milsteina jest bliższa rzeczywistemu rozwiązaniu równania różniczkowego opisującego geometryczny ruch Browna i praktycznie pokrywa się z nim na poniższym rysunku.

Rysunek 2.5: Aproksymacja procesu geometrycznego ruchu Browna.



Źródło: opracowanie własne.

Ze względu jednak na prostotę postaci matematycznej oraz na małe wielkości przyrostów czasu¹⁵, co powoduje nieznaczny błąd aproksymacji, zazwyczaj korzysta się z przybliżenia Eulera w zakresie modelowania procesów cen.

Odpowiednio przybliżać można także procesy będące funkcjami procesów Itô. Dla wzoru (2.18) uzyskujemy następującą aproksymację według schematu Eulera¹⁶:

$$\Delta(\ln X) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z_t, \quad (2.43)$$

$$X_{t+\Delta t} = X_t \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z_t \right]. \quad (2.44)$$

Wzór (2.44) jest najczęściej wykorzystywanym podejściem do generowania trajektorii geometrycznego ruchu Browna.

Zaprezentowanie technik przybliżania procesów z czasem ciągłym procesami z czasem dyskretnym miało na celu pokazanie związków pomiędzy parametrami tych modeli.

Nie wdając się w tym miejscu w szczegółowe rozważania, warto zaznaczyć, iż wyniki uzyskane ze schematu Eulera służą jako podstawa najczęściej wykorzystywanej techniki estymacji parametrów rozpatrywanych procesów, a mianowicie **metody**

¹⁵Zakładając, że w roku odbywają się średnio 252 sesje oraz, że czas upływa zgodnie z hipotezą dni sesyjnych, przyrost $\Delta t = \frac{1}{252} \approx 0,003968$.

¹⁶Schemat Milsteina jest w tym wypadku tożsamy.

największej wiarygodności. Metoda ta prowadzi bądź to do wyznaczenia wzorów odpowiednich estymatorów parametrów procesu, bądź do oszacowania parametrów procesu metodami numerycznymi. Technika estymacji parametrów procesów metodą największej wiarygodności przedstawiona zostanie w dalszej części pracy.

W dalszej części rozdziału wyróżnione zostaną rozważania dotyczące:

- modelowania poziomów cen akcji, indeksów akcji, walut oraz towarów,
- modelowania poziomów stóp procentowych.

Podział taki wynika z faktu, iż w przypadku modelowania stóp procentowych modeluje się właściwie zmienną, nie będącą instrumentem finansowym, a jedynie wpływającą na cenę instrumentów finansowych. Różnica polega również na tym, iż w przypadku stóp procentowych opisowi powinna podlegać cała krzywa stóp procentowych.

2.5. Modelowanie stóp zwrotu akcji, towarów i walut

W niniejszym podrozdziale przedstawione zostaną techniki modelowania zmian cen (konkretniej stóp zwrotu) akcji, walut oraz towarów. We wcześniejszej części rozdziału, na stronie 58, przedstawione zostały różne modele, które mogą zostać wykorzystane do opisu zmian w czasie poziomym cen instrumentów finansowych. Jednak zgodnie z ogólnie rozpowszechnioną definicją zmienności instrumentów finansowych zaprezentowaną w rozdziale 1, a mówiącą, iż miarą zmienności jest odchylenie standardowe stóp zwrotu w zadanym okresie, nietrudno zauważyć, że koresponduje ona wprost **jedynie** z procesem geometrycznego ruchu Browna (model M.2.) oraz z modelem powrotu do średniej oznaczonym jako M.6. Z tych dwóch modeli, zdecydowanie większą popularność zdobył model geometrycznego ruchu Browna. Dzięki swoim własnościom matematycznym, stał się on podstawowym modelem wykorzystywanym w praktyce do opisu zachowania cen akcji, indeksów, towarów oraz kursów walut.

W tym miejscu zaprezentowana zostanie analiza najpopularniejszego procesu zmiany cen, a mianowicie geometrycznego ruchu Browna. Prze-

stawienie możliwych uogólnień (i ich własności) pozwalających na jak najlepsze uwzględnienie cech rzeczywistych szeregów czasowych jest głównym celem tego podrozdziału. Rozważania skupione zostaną wokół częściej wykorzystywanych modeli z czasem dyskretnym, których aplikacja w zakresie zarządzania ryzykiem jest bardziej szeroka niż modeli z czasem ciągłym¹⁷.

Wzór (2.35) na prostą stopę zwrotu oraz wzór (2.44) na logarytmiczną stopę zwrotu można zapisać w postaci:

$$r(t) = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{X_t} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_t \quad (2.45)$$

oraz

$$R(t) = \ln\left(\frac{X_{t+\Delta t}}{X_t}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_t. \quad (2.46)$$

W powyższych wzorach μ oraz σ wyrażone są w skali okresu bazowego, którym jest najczęściej jeden rok, a wyrażenia $\mu\Delta t$ oraz $\sigma\sqrt{\Delta t}$ to oczekiwana stopa zwrotu oraz odchylenie standardowe stóp zwrotu w skali okresu, będącego odstępem pomiędzy kolejnymi „pomiarami” poziomu procesu (horyzontem stopy zwrotu).

Bardzo często powyższe wzory spotyka się więc w postaci:

$$r(t) = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{X_t} = \mu' + \sigma'z_t \quad (2.47)$$

oraz

$$R(t) = \ln\left(\frac{X_{t+\Delta t}}{X_t}\right) = \left(\mu' - \frac{\sigma'^2}{2}\right) + \sigma'z_t. \quad (2.48)$$

Zakładając stałość współczynnika σ (lub godząc się na pewien błąd), wzór (2.48) przedstawia się w postaci analogicznej do wzoru (2.47), czyli:

$$R(t) = \ln\left(\frac{X_{t+\Delta t}}{X_t}\right) = \mu'' + \sigma'z_t, \quad (2.49)$$

gdzie: μ' , μ'' , σ' wyrażone są w horyzoncie stóp zwrotu, czyli najczęściej w skali jednego dnia sesyjnego.

Wzór (2.47) jest podstawowym wzorem, który rozpatrywany będzie w dalszej części pracy. W celu uproszczenia zapisu pomijając będziemy „prymy” stojące we wzorze

¹⁷Odkąd w ostatnich latach rozwinięty został aparat wyceny opcji dla czasu dyskretnego z uwzględnieniem zmiennego parametru zmienności, znaczenie modeli ciągłych relatywnie spadło.

i oznaczające, iż parametry oczekiwanej stopy zwrotu oraz zmienności podawane są w skali czasu równej horyzontowi stopy zwrotu (Δt).

Podstawowym rozpatrywanym modelem, opisującym szereg czasowy prostych stóp zwrotu, będzie więc równanie:

$$r_t = \frac{X_t - X_{t-\Delta t}}{X_{t-\Delta t}} = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sigma z_t, \quad z_t \sim N(0, 1) \quad (2.50)$$

opisujące model szeregu czasowego prostych stóp zwrotu.

Wykorzystane zostaną proste stopy zwrotu, by uniknąć pojawiającego się na mocy lematu Itô składnika $0,5\sigma^2$.

Model ten będzie stopniowo uogólniany w celu uzyskania jak najlepszej zgodności z empirycznymi szeregami stóp zwrotu. Zanim przedstawione zostaną możliwe uogólnienia modelu, warto zaprezentować własności szeregów uzyskiwanych przy założeniu, iż szeregi stóp zwrotu kształtowane są przez model dany wzorem (2.50) oraz udokumentowane empiryczne własności szeregów stóp zwrotu. Empiryczne własności szeregów wyznaczać będą kierunki uogólnień modelu danego wzorem (2.50).

2.6. Empiryczne własności szeregów stóp zwrotu

Gdyby szeregi czasowe stóp zwrotu były rzeczywiście realizacjami procesu stochastycznego danego wzorem (2.50), to powinny być obserwowalne następujące empiryczne własności tych szeregów:

1. stopy zwrotu powinny mieć rozkład normalny,
2. parametry tego rozkładu powinny być stałe w czasie,
3. szeregi stóp zwrotu powinny być nieskorelowane oraz cechować się brakiem autokorelacji w szeregach kwadratów stóp zwrotu.

Badania empiryczne wykazały jednak w bardzo wielu przypadkach odstępstwa od powyższych własności występujące w szeregach czasowych stóp zwrotu.

Na fakt, że empiryczne rozkłady stóp zwrotu odbiegają od rozkładu normalnego zwrócił uwagę po raz pierwszy Mandelbrot (por. Mandelbrot (1963)). Dalsze analizy podjął Fama (por. Fama (1965)). Artykuły te zapoczątkowały całą serię prac dotyczącą analizy własności stóp zwrotu.

W zależności od analizowanego instrumentu finansowego, okresu obejmującego badanie oraz horyzontu stóp zwrotu, możliwe są częściowo odmienne wyniki, niemniej jednak zaobserwowano następujące własności charakteryzujące stopy zwrotu:

- **grube ogony rozkładów** (*leptokurtoza, fat tails*)

Prawdopodobieństwo pojawienia się bardzo dużych (co do wartości bezwzględnej) wartości stóp zwrotu (obserwacji ekstremalnych) jest większe niż dla rozkładu normalnego. Prawdopodobieństwo, iż zaobserwowana zostanie więc stopa zwrotu większa od odpowiednio założonej, $P(r_t > r)$, jest większe niż wynikałoby z przyjęcia założenia o gaussowskim rozkładzie stóp zwrotu (analogicznie dla lewego ogona rozkładu). Badania empiryczne wykazały, iż dla $r \rightarrow \infty$, prawdopodobieństwo to jest proporcjonalne do $r^{-\alpha}L(r)$, gdzie α jest indeksem określającym grubość ogona, a $L(r)$ jest wolno zmieniającą się funkcją (por. Weron i Weron (1998), Rejman (1997)). W przypadku rozkładu normalnego analogiczne prawdopodobieństwo dane jest zależnością potęgową, a nie wykładniczą.

- **skośność rozkładów** (*skewness*)

Zaobserwowano, że w większości szeregów stóp zwrotu częściej występują stopy zwrotu większe niż modalna, co tłumaczy się odmiennym zachowaniem inwestorów w czasie hossy i bessy lub dokładniej odmiennymi zachowaniami w przypadku napływania dobrych i złych informacji. Skutkuje to dodatnim współczynnikiem skośności wyznaczanym dla większości szeregów empirycznych. Nie jest to jednak regułą, gdyż współczynnik skośności dla np. szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG (z okresu od rozpoczęcia notowań do maja 2002 roku) przyjmuje wartość ujemną, co świadczy o skośności lewostronnej rozkładu empirycznego. Podczas analizy dziennych stóp zwrotu z 35 instrumentów z rynku polskiego, w 22 przypadkach uzyskano dodatni współczynnik skośności, a w 13 przypadkach - ujemny (por. Jajuga (2000a)). Także w przypadku współczynnika skośności wynik badania zależy od wybranego okresu oraz analizowanego horyzontu stóp zwrotu (por. Konarzewska (1998), (2000)).

Ogólnie założyć należy, iż rozkłady stóp zwrotu mogą charakteryzować się zarówno dodatnią, jak i ujemną skośnością. W niektórych przypadkach efekt ten jest na tyle znaczny, że przyjęcie założenia o braku skośności rozkładu może znacznie fałszować obraz rzeczywistości.

- **skupianie zmienności** (*volatility clustering*)

Już we wczesnych pracach Mandelbrota (por. Mandelbrot (1963)) zaprezentowano dowody na niestałość wariancji stóp zwrotu w czasie. W szeregach czasowych stóp

zwrotu można bowiem wyróżnić okresy większej i mniejszej aktywności inwestorów, czyli okresy z dużymi zmianami cen (tzw. skupiska zmienności, *clusters*) oraz okresy o mniejszych zmianach cen. Okresy te występują seriami. Małe zmiany cen (małe co do wartości bezwzględnej stopy zwrotu) następują po małych zmianach, a duże po dużych, lecz kierunek zmian (znak stopy zwrotu) jest nieprzewidywalny. Bardzo częstym efektem jest tworzenie się wokół dużego głównego skupiska zmienności, mniejszych okresów o większej niż zazwyczaj aktywności inwestorów.

- **„efekt dźwigni”** (*leverage effect*)

Zaobserwowano również (por. Black (1976)), że zmiany cen są ujemnie skorelowane z poziomem zmienności czyli, że wraz ze wzrostem kursów akcji zmniejsza się zmienność (zmniejsza się ryzyko związane z danym instrumentem). W przypadku instrumentów akcyjnych efekt ten tłumaczy się przynajmniej zmniejszeniem kapitałów własnych przedsiębiorstwa i wzrostem poziomu ryzyka.

- **autokorelacja oraz długoterminowa zależność danych** (*long-term memory*)

W niektórych analizowanych szeregach czasowych obserwuje się, iż kolejne stopy zwrotu są skorelowane. Po wzrostach występują częściej kolejne wzrosty, a po spadkach kolejne spadki. Najczęściej zasięg zależności korelacyjnej ograniczony jest do opóźnień o rzędzie mniejszym niż 5, ale może wynosić nawet kilkadziesiąt, bądź kilkaset, co nazywane jest wtedy „długą pamięcią procesu”.

- **„przenikanie zmienności” pomiędzy rynkami i instrumentami** (*volatility spillovers, co-movements in volatilities*)

Analiza stóp zwrotu instrumentów z różnych rynków lub różnych instrumentów z tego samego rynku wykazała częste występowanie silnej zależności korelacyjnej pomiędzy szeregami zmienności tych instrumentów. Zaowocowało to powstaniem modeli wielorównaniowych, opisujących łącznie zachowanie całego zbioru instrumentów.

Oprócz wymienionych powyżej własności zaobserwowano też wiele innych zależności, które jednak nie wpływają już w sposób tak znaczący na techniki modelowania cen oraz zmienności. Przykładem może być tutaj cała gama tzw. **efektów kalendarzowych** związanych z odmiennym zachowaniem się instrumentów (odmiennymi rozkładami stóp zwrotu) dla niektórych dni tygodnia oraz dla niektórych miesięcy. Efekty te rozpatrywać można zarówno odnośnie oczekiwanych stóp zwrotu w danym dniu tygodnia lub w danym miesiącu, a także odnośnie wariancji stóp zwrotu z analizowanego okresu w stosunku do stóp zwrotu z innych okresów. Najczęściej

analizowane są **efekt poniedziałku** oraz **efekt stycznia** (por. Piontek (2000)).

Zaobserwowane właściwości stóp zwrotu stały się podstawą do poszukiwania coraz lepszych modeli zachowania stóp zwrotu, a tym samym bardziej precyzyjnego opisu rzeczywistości. W dalszych podrozdziałach przedstawione zostaną możliwe uogólnienia wzoru (2.50), które sprowadzają się do:

- wprowadzenia odmiennego od rozkładu normalnego rozkładu błędu modelu z_t , który cechowałby się grubszymi ogonami oraz ewentualną skośnością,
- zastosowania zmiennego w czasie parametru μ , który dopuszczałby modelowanie efektów autokorelacyjnych,
- wprowadzenia zmiennego w czasie parametru σ , który pozwalałby przede wszystkim na ujęcie w modelu efektu gromadzenia zmienności, ale także grubych ogonów rozkładów oraz autokorelacji kwadratów stóp zwrotu,
- rezygnacji z niezależności przyrostów procesu odpowiedzialnego za modelowanie losowych własności modelu, tym samym możliwości modelowania długoterminowej pamięci procesu.

Uogólnienia te mogą być wprowadzane zarówno oddzielnie, jak i łącznie tworząc szeroką gamę rozważanych modeli.

W tym znaczeniu ze statycznym zarządzaniem ryzykiem związane są jedynie innowacje w zakresie kształtu funkcji gęstości rozkładów stóp zwrotu, natomiast dynamiczne zarządzanie ryzykiem wykorzystywać może wszystkie zasygnalizowane uogólnienia modelu podstawowego.

2.7. Uogólnienia w zakresie z_t

Wzór (2.50) można przedstawić w postaci:

$$\frac{r_t - \mu}{\sigma} = z_t, \quad (2.51)$$

gdzie:

μ - średnia stopa zwrotu,

σ - odchylenie standardowe stóp zwrotu (zmienność),

z_t - zmienna o rozkładzie normalnym o średniej 0 oraz wariancji 1, $z_t \sim N(0, 1)$,

lub w postaci:

$$r_t \sim N(\mu, \sigma^2). \quad (2.52)$$

Jest to najczęściej czynione, podstawowe założenie w zakresie analizy stóp zwrotu. Zakłada się, iż stopy zwrotu cechują się rozkładem o stałych w czasie parametrach oraz dodatkowo, iż jest to rozkład normalny.

Bardzo często zakłada się dodatkowo, że $\mu \cong 0$, co prowadzi do wzoru:

$$\frac{r_t}{\sigma} = z_t. \quad (2.53)$$

Założenie o normalności rozkładu wynika przede wszystkim z dobrze poznanych właściwości tego rozkładu (brak problemów z estymacją parametrów i wnioskowaniem statystycznym). Z wcześniejszych rozważań w tym rozdziale można odnieść wrażenie, iż to założenie jest również konsekwencją przyjęcia za model zmiany cen geometrycznego procesu Browna, jednak warto zaznaczyć, iż prezentowane tu podejścia rozwijały się w dużej mierze niezależnie.

Założenie o normalności rozkładów zakwestionowane zostało już we wczesnych latach 60-tych. Na podstawie badań empirycznych, Mandelbrot (por. Mandelbrot (1963)) oraz Fama (por. Fama (1963), (1965)) udokumentowali fakt, iż rozkłady są zwrotu są w swej większości rozkładami leptokurtotycznymi (o większym niż dla rozkładu normalnego parametrze kurtozy) oraz o grubszych ogonach rozkładu niż dla rozkładu normalnego. Badania te zapoczątkowały szereg prac empirycznych oraz teoretycznych, których celem było potwierdzenie oraz wytłumaczenie i modelowanie zaprezentowanego faktu.

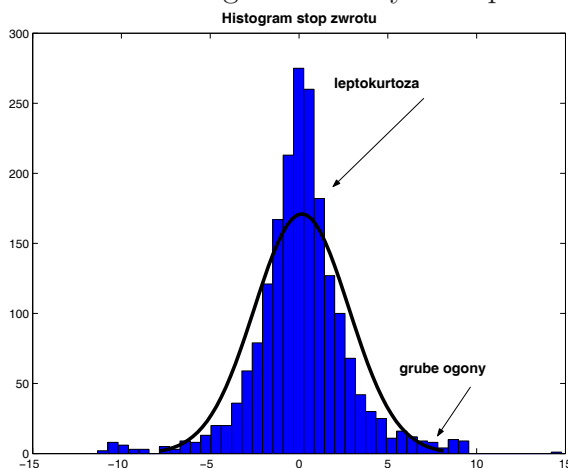
Grube ogony potwierdzone zostały również w szeregach czasowych obejmujących polskie dane. Efekt grubych ogonów przedstawiony został na rysunku 2.6., który przedstawia histogram dziennych stóp zwrotu z indeksu WIG (z okresu od początku notowań, tj. kwietnia 1991 do maja 2002 roku) wraz z dopasowaną gęstością rozkładu normalnego. Odmiennym narzędziem do obrazowania odstępstw od zakładanego rozkładu jest wykres kwantyl-kwantyl (*qq-plot*)¹⁸. Gdyby rozkład empiryczny był rozkładem normalnym, to wykres kwantyl-kwantyl powinien przedstawiać linię prostą.

¹⁸Formalnie jest to wykres składający się z punktów $(X_{(k)}, F^{-1}[(n-k+1)/(n+1)])$, gdzie $X_{(k)}$ jest k -tą statystyką pozycyjną, n jest wielkością próby, a $F^{-1}(\cdot)$ jest odwrotnością dystrybuanty analizowanego teoretycznego rozkładu.

Odchylenia od linii teoretycznej oznaczają odstępstwa od zakładanego rozkładu teoretycznego. Wykres kwantyl-kwantyl dla standaryzowanych stóp zwrotu z indeksu WIG przedstawia rysunek 2.7. Ciekawe analizy z rynku polskiego znaleźć można w pracy pod red. K. Jajugi, w której analizie poddano szeregi stóp zwrotu z 33 akcji oraz indeksów WIG i WIG-20 (z okresu 26.10.1994-31.01.2000) w zakresie rozkładów dziennych, tygodniowych oraz miesięcznych stóp zwrotu (por. Jajuga (2000a)). Do weryfikacji hipotezy o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym wykorzystano testy λ -Kolmogorowa oraz Shapiro-Wilka. Zgodnie z wynikami uzyskiwanymi dla rynków rozwiniętych (por. np. Officer (1972), Akgiray, Booth (1988)) wyniki testu uzależnione są od horyzontu analizowanych stóp zwrotu. Okazuje się, że dla wszystkich spółek oraz indeksów, które poddane zostały analizie, hipoteza zerowa o zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem normalnym ulega odrzuceniu przy poziomie istotności 0,05. Spowodowane jest to zwiększoną kurtozą oraz skośnością rozkładów (por. Jajuga (2000a)). Wraz ze wzrostem horyzontu stóp zwrotu, zwiększa się odsetek instrumentów, dla których brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy z zgodności rozkładu empirycznego z normalnym. Wynik ten potwierdza znaną obserwację, iż wraz ze wzrostem horyzontu stóp zwrotu, wzrasta parametr określający grubość ogonów, co skutkuje tym, że rozkłady zbliżają się do rozkładu normalnego (por. Rejman (1997)).

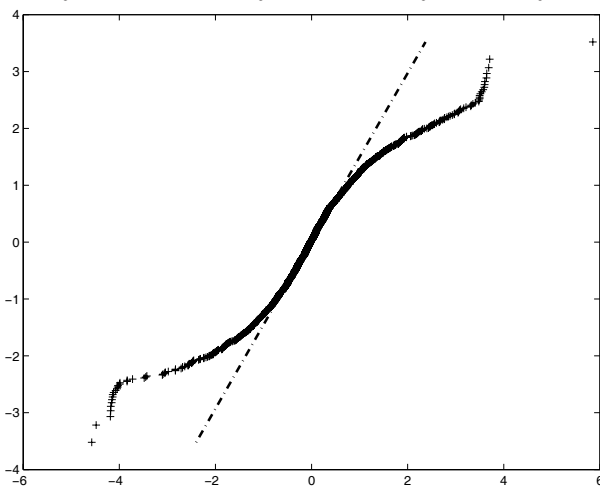
Więcej informacji na temat podstawowych własności rozkładów stóp zwrotu z indeksu WIG dla horyzontów stóp zwrotu oraz różnych rocznych podokresów z lat 1993-1999 znaleźć można w pracy Konarzewskiej (por. Konarzewska (2000)). Z pracy tej wynika dodatkowa informacja, iż grubość ogonów rozkładu indeksu WIG nie jest stała w czasie.

Rysunek 2.6: Histogram dziennych stóp zwrotu



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.7: Wykres kwantyl-kwantyl



Źródło: opracowanie własne.

2.7.1. Rozkłady o jednostkowej wariancji

Jak już zostało udokumentowane, rozkłady stóp zwrotu posiadają zazwyczaj grube ogony. Zakładając stałość w czasie parametrów μ oraz σ , efekt ten najprościej można opisać zakładając, iż standaryzowany błąd modelu z_t podlega właśnie rozkładowi o grubych ogonach.

Aby zachować własność, że parametr σ jest bezwarunkową lub warunkową¹⁹ zmiennością procesu mierzoną odchyleniem standardowym, narzuca się najczęściej (zasy-

¹⁹Pojęcie warunkowej wariancji wprowadzone zostanie w kontekście modeli ze zmiennym w czasie parametrem σ w dalszej części pracy.

gnalizowane wcześniej) założenie, że:

$$z_t \sim iid(0, 1), \quad (2.54)$$

czyli z_t jest zmienną losową, której realizacje są niezależne i opisywane przez identyczne rozkłady o zerowej średniej i wariancji równej jeden. Warunek ten jest konieczny również, aby zachować spójność z rozważanymi później modelami o zmiennej wariancji.

Przy tak sprecyzowanym zagadnieniu, najczęściej wykorzystuje się następujące rozkłady pozwalające na ujęcie efektu grubych ogonów:

- rozkład t-Studenta,
- uogólniony rozkład błędu (*General Error Distribution, GED*),
- uogólniony rozkład hiperboliczny.

Rozkład t-Studenta

Zmienna losowa Z typu ciągłego ma rozkład t-Studenta o ν stopniach swobody, jeśli jej funkcja gęstości wyraża się wzorem:

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (2.55)$$

gdzie $\Gamma(y)$ to funkcja gamma dla parametru y dana następującym wzorem:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx. \quad (2.56)$$

Tak zdefiniowany rozkład t-Studenta (dla $\nu > 2$) jest rozkładem symetrycznym, o średniej zero, a jego wariancja dana jest wyrażeniem $\frac{\nu}{\nu-2}$. Dla $\nu \rightarrow \infty$ gęstość rozkładu t-Studenta dąży do gęstości rozkładu normalnego.

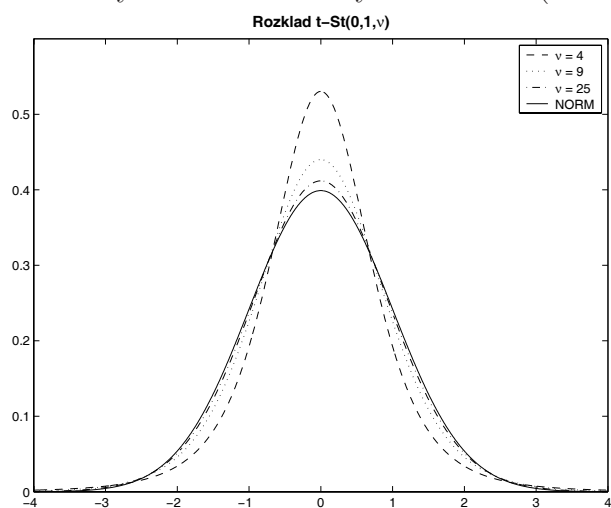
Na podstawie wzoru (2.51) oraz uwzględniając warunek (2.54), odpowiednio przeskalowany rozkład t-Studenta możemy zapisać w postaci:

$$f_{tS}(r; \mu, \sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{(\nu-2)\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sigma} \left(1 + \frac{(r-\mu)^2}{(\nu-2)\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \quad (2.57)$$

Tak przeskalowany rozkład ma średnią zero oraz wariancję równą jeden. W dalszej części pracy rozkład ten będzie oznaczany jako $t-St(0, 1, \nu)$, a nazywany po prostu rozkładem t-Studenta.

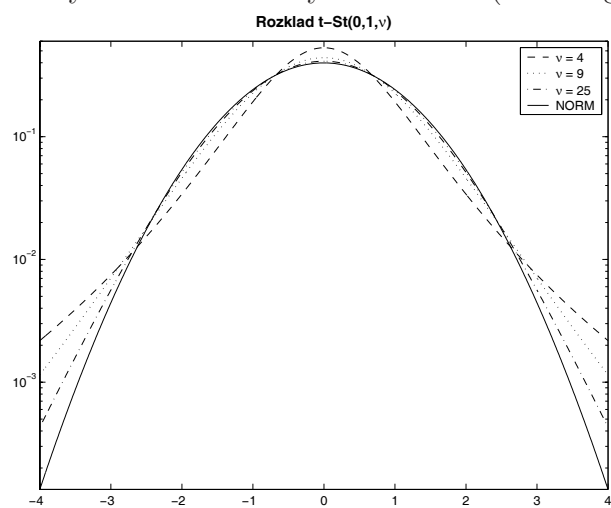
Na rysunkach 2.8. oraz 2.9 przedstawiono przykładowe funkcje gęstości rozkładu $t\text{-St}(0, 1, \nu)$ dla różnej liczby stopni swobody. Efekt grubych ogonów rozkładu szczególnie dobrze można zaobserwować na rysunku ze skalą logarymiczną.

Rysunek 2.8: Przykładowe rozkłady t-Studenta (skala liniowa)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.9: Przykładowe rozkłady t-Studenta (skala logarymiczna)



Źródło: opracowanie własne.

Rozkład t-Studenta w kontekście modeli umożliwiających opis zmiennej w czasie wariancji zaproponował Bollerslev w 1983 roku (por. Bollerslev, Chou, Kroner (1992)). W pracy Bollersleva, Chou i Kronera znaleźć można szereg przykładów zastosowania powyższego rozkładu w zagadnieniach związanych z modelowaniem finansowych szeregów czasowych. Przykład zastosowania rozkładu t-Studenta do modelo-

wania i pomiaru ryzyka dla polskich szeregów czasowych znaleźć można w pracach Fiszедера (por. Fiszeder (2001)) oraz Piontka (por. Piontek (2002)).

Procedura wyznaczania parametrów modelu za pomocą metody największej wiarygodności dla podstawowych wykorzystywanych rozkładów (normalnego, t-Studenta, GED oraz skośnego t-Studenta) zaprezentowana zostanie w dalszej części pracy po wprowadzeniu zmiennych w czasie parametrów średniej μ_t oraz zmienności σ_t w podrozdziale 2.9.

Rozkład GED

Kolejnym, stosunkowo prostym do wykorzystania rozkładem, który w zależności od przyjętej liczby stopni swobody, pozwala na uzyskanie rozkładu o grubszych ogonach niż rozkład normalny jest **uogólniony rozkład błędu** (*General Error Distribution*) nazywany w dalszej części pracy rozkładem GED.

Odpowiednio przeskalowany rozkład GED posiada funkcję gęstości o postaci:

$$f_{GED}(r; \mu, \sigma, \nu) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \frac{r - \mu}{\lambda \sigma} \right|^\nu\right)}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) \sigma} 2^{-\frac{\nu+1}{\nu}}, \quad (2.58)$$

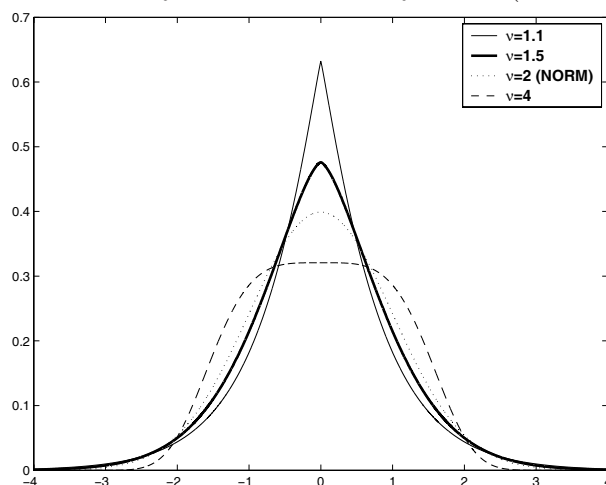
gdzie λ to parametr zapewniający jednostkową wariancję rozkładu dany wzorem:

$$\lambda = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} 2^{-\frac{2}{\nu}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.59)$$

Na rysunkach 2.10. oraz 2.11. przedstawiono przykładowe funkcje gęstości rozkładu $GED(0, 1, \nu)$ dla różnej liczby stopni swobody. Także w tym przypadku, efekt grubych ogonów rozkładu można dobrze zaobserwować na rysunku ze skalą logarytmiczną.

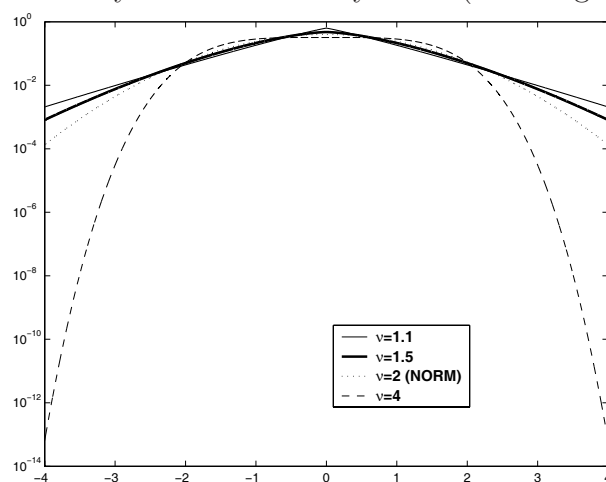
Rozkład normalny jest szczególnym przypadkiem rozkładu GED dla parametru ν równego 2.

Rysunek 2.10: Przykładowe rozkłady GED (skala liniowa)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.11: Przykładowe rozkłady GED (skala logarytmiczna)



Źródło: opracowanie własne.

Rozkład GED został wprowadzony do zagadnień modelowania szeregów stóp zwrotu w kontekście modeli ze zmienną w czasie wariancją przez Nelsona (por. Nelson (1991)). O przydatności tego rozkładu w zagadnieniach związanych z modelowaniem szeregów czasowych i pomiarem ryzyka może świadczyć szereg prac (por. Bollerslev, Chou, Kronner (1992)). Przykład wykorzystania tego rozkładu w zagadnieniach pomiaru ryzyka m.in. dla polskich danych finansowych znaleźć można w pracy Piontka (por. Piontek (2002)).

Rozkłady hiperboliczne

Znacznie bardziej ogólnym rozkładem, umożliwiającym modelowanie grubych ogonów oraz posiadającym własność skończonego momentu drugiego rzędu jest wprowadzony przez Barndorffa-Nielsen **uogólniony rozkład hiperboliczny** (por. Prause (1997)). Rozkład ten powstał podczas prac nad opisem przenoszenia ziaren piasku przez wiatr i dopiero później trafił do finansów.

Nazwa „rozkłady hiperboliczne” pochodzi od własności, iż logarytm funkcji gęstości jest funkcją hiperboliczną, a nie jak w przypadku rozkładu normalnego - parabolą. Już na podstawie tej prostej własności dostrzec można potencjalne możliwości modelowania grubszych ogonów rozkładów niż dla rozkładu normalnego.

Gęstość uogólnionego rozkładu hiperbolicznego dana jest wzorem:

$$f_{GH}(r_t; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda - \frac{1}{2})/2} \\ \times K_{\lambda - \frac{1}{2}} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \exp[\beta(x - \mu)],$$

gdzie:

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}, \quad (2.60)$$

α - parametr kształtu,

β - parametr skośności,

δ - parametr skali,

μ - parametr położenia,

λ - parametr określający typ rozkładu,

oraz $K_\nu(\cdot)$ to normująca rozkład funkcja Bessela III rodzaju dana wzorem:

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y(x + x^{-1})\right) dx. \quad (2.61)$$

Na parametry rozkładu nałożone są warunki:

$$0 \leq |\beta| < \alpha, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0. \quad (2.62)$$

Trzymając się konwencji, iż poszukuje się takich rozkładów z_t , by miały one skończoną i do tego jednostkową wariancję, niezbędna jest umiejętność przeskalowania

rozkładu (por. Eberlein, Prause (2001)).

Wprowadza się zmienną pomocniczą:

$$\zeta = \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (2.63)$$

Rozkład o zadanej wariancji σ^2 (w tym przypadku $\sigma^2 = 1$) uzyskuje się przeliczając parametr rozkładu δ według wzoru:

$$\tilde{\delta} = \sigma \left[\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{\zeta K_{\lambda}(\zeta)} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left(\frac{K_{\lambda+2}(\zeta)}{K_{\lambda}(\zeta)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\zeta)}{K_{\lambda}(\zeta)} \right)^2 \right) \right]. \quad (2.64)$$

Pozostałe parametry rozkładu dane są wówczas zależnościami:

$$\tilde{\lambda} = \lambda, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha \delta}{\tilde{\delta}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta \delta}{\tilde{\delta}}, \quad \tilde{\mu} = \mu. \quad (2.65)$$

Parametr λ jest parametrem rozkładu określającym jego typ i powinien być estymowany, jednak często rozważa się rozkłady zadaną wartością λ estymując jedynie pozostałe parametry. Największą popularność zdobyły rozkłady z parametrem λ równym (por. Weron i Weron (1998)):

- $\lambda = 1$, rozkład hiperboliczny (*Hyp*),
- $\lambda = -\frac{1}{2}$, rozkład normalny odwrotny gaussowski (*NIG*).

Odpowiednie funkcję gęstości rozkładów dane są następującymi wzorami:

dla $\lambda = 1$:

$$f_{Hyp}(r) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha\delta K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} \exp \left[-\alpha \sqrt{\delta^2 + (r - \mu)^2} + \beta(r - \mu) \right], \quad (2.66)$$

dla $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$f_{NIG}(r) = \frac{\alpha}{\pi} \exp \left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(r - \mu) \right) \frac{K_1 \left(\alpha \delta \sqrt{1 + \left(\frac{r - \mu}{\delta} \right)^2} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{r - \mu}{\delta} \right)^2}}. \quad (2.67)$$

Przyjmując najprostszą wersję rozkładu hiperbolicznego, czyli przypadek rozkładu o zerowej średniej i zerowej asymetrii ($\mu = \beta = 0$), uzyskuje się najczęściej wykorzystywany przypadek rozkładu o funkcji gęstości danej wzorem:

$$f(r) = \frac{1}{2\delta K_1(\delta\alpha)} \exp \left(-\alpha \sqrt{\delta^2 + r^2} \right). \quad (2.68)$$

Warunek zapewniający jednostkową wariancję ma na podstawie wzoru (2.64) zdecydowanie prostszą postać:

$$\tilde{\delta} = \left(\delta \alpha \frac{K_1(\delta \alpha)}{K_2(\delta \alpha)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.69)$$

Granicznymi przypadkami rozkładu hiperbolicznego są np. rozkłady:

- normalny,
- Laplace'a opisany funkcją gęstości o postaci:

$$f(r; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|r - \mu|}{\sigma}\right), \quad -\infty < r < \infty. \quad (2.70)$$

Przykładowe zastosowania rozkładów hiperbolicznych znaleźć można w przeglądowej pracy Eberleina i Kellera (por. Eberlein, Keller (1995)), a także w pracach Eberleina i Prause'a (por. Eberlein, Prause (2001)), Bauera (por. Bauer (2000)) oraz Weron i Weron (por. Weron, Weron (1998)).

2.7.2. Rozkłady skośne

Fakt, iż w empirycznych szeregach czasowych ujemne lub dodatnie stopy zwrotu pojawiają się częściej niż stopy zwrotu o przeciwnym znaku, udokumentowany został szczegółowo w wielu pracach z dziedziny finansów. Pracę Famy z 1963 roku rozszerzyli o inne instrumenty oraz rynki w latach 80-tych np. Kon (1984), Singleton i Wingender (1986), a następnie np. Alles i Kling (1994). Potwierdzili oni, że w większości przypadków obserwuje się dodatnią skośność rozkładów, lecz zdarzają się również instrumenty, dla których szeregi stóp zwrotu cechują się lewostronną skośnością.

Zaobserwowana skośność w rozkładach stóp zwrotu ma znaczne implikacje w wycenie opcji (por. Harvey i Siddique (2000)), konstrukcji portfela (por. Kraus i Litzenberger (1976), Markowitz (1991)) oraz pomiarze ryzyka metodą *VaR* (por. np. Best (2000), Jorion (2001)). Konieczna jest więc możliwość modelowania skośności rozkładów stóp zwrotu.

Najprostszym sposobem uwzględnienia skośności rozkładów stóp zwrotu jest wprowadzenie w rozważanym modelu podstawowym (danym wzorem (2.50)), takiego składnika losowego z_t , który ma rozkład skośny.

Niezbędne było więc poszukiwanie innych skośnych rozkładów ciągłych, które cechowałyby się możliwością uzyskania zerowej średniej, jednostkowej wariancji oraz

dotatkowo skośności i efektu grubych ogonów. Znalezienie takich rozkładów powinno pozwolić na lepsze dopasowanie empirycznych stóp zwrotu do modelu oraz na pozostanie w konwencji, iż zmienność szacowana będzie przez odchylenie standardowe stóp zwrotu.

Ze względu na postulowany efekt grubych ogonów, poszukiwania skupiły się przede wszystkim wokół przekształceń rozkładu t-Studenta. Część możliwych rozwiązań przedstawiona została w pracy Bonda (por. Bond (2001)). Zaprezentowane tam modele umożliwiają uwzględnienie, poza skośnością, także efektu zmian wariancji w czasie (heteroskedastyczności), czy autokorelacji stóp zwrotu. W tym miejscu rozważania ograniczone zostaną jedynie do modelowania asymetrii rozkładu stóp zwrotu. Rozwiązania umożliwiające modelowanie pozostałych efektów przedstawione zostaną w dalszej części rozdziału. Warto zaznaczyć, iż ostateczny model można budować „jak z klocków” łącząc poszczególne prezentowane rozwiązania.

Najpopularniejsze rozwiązanie przedstawili w 1998 Fernandez i Steel proponując procedurę rozszerzenia rozkładu t-Studenta o parametr skośności (por. Lambert, Laurent (2001)). Procedurę tę można zastosować do wszelkich ciągłych, symetrycznych rozkładów jednomodalnych. Przedstawia się ona następująco:

Niech:

- zmienna u ma jednomodalną, ciągłą, symetryczną gęstość rozkładu oznaczaną przez $g(\cdot)$:

$$u \sim iid g(0, 1), \quad (2.71)$$

- zmienna x jest realizacją procesu Bernoulli’ego, dla którego prawdopodobieństwem sukcesu równa się $\frac{\xi^2}{1+\xi^2}$:

$$P(x = 1) = 1 - P(x = 0) = \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}, \quad (2.72)$$

- zmienna ϵ zadana jest w sposób następujący:

$$\epsilon = x\xi|u| - (1 - x)\frac{1}{\xi}|u|. \quad (2.73)$$

Można wtedy wykazać (por. Lambert i Laurent (2001)), że gęstość rozkładu $f(\epsilon|\xi)$ dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} f(\epsilon|\xi) &= P(x = 1)g(\epsilon|\xi, x = 1) + P(x = 0)g(\epsilon|\xi, x = 0) \\ &= \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \left[g\left(\frac{\epsilon}{\xi}\right) I_{[0, \infty)(\epsilon)} + g(\epsilon\xi) I_{(-\infty, 0)(\epsilon)} \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

Uzyskany w ten sposób rozkład $f(\epsilon|\xi)$ jest rozkładem jednomodalnym, o modalnej takiej samej jak rozkład $g(\epsilon)$ oraz parametrze skośności $\xi > 0$. Dla $\xi \in (0, 1)$ otrzymujemy rozkład lewostronnie skośny, a dla $\xi \in (1, +\infty)$ rozkład prawostronnie skośny. Alternatywnie parametr skośności można zdefiniować jako $\xi' = \ln(\xi)$, co pozwala powiązać znak parametru z kierunkiem skośności.

Stosunek odpowiednich prawdopodobieństw dla tak zdefiniowanego rozkładu skośnego wynosi:

$$\frac{P(\epsilon \geq 0|\xi)}{P(\epsilon < 0|\xi)} = \xi^2. \quad (2.75)$$

Na podstawie powyższej procedury można nadać skośność dowolnym rozkładom symetrycznym, np. rozkładowi normalnemu, t-Studenta, GED. Największą popularność, ze względu na możliwość modelowania jednocześnie grubych ogonów oraz ze względu na stosunkowo prostą postać matematyczną rozkładu, zyskał **skośny rozkład t-Studenta**.

Po zastosowaniu powyższej procedury do rozkładu t-Studenta danego wzorem (2.57) uzyskuje się skośny rozkład t-Studenta. Rozkład ten posiada jednak jedną podstawową wadę. Nie ma zerowej średniej oraz jednostkowej wariancji, a co za tym idzie parametry μ oraz σ^2 nie są średnią oraz wariancją, a jedynie modalną oraz pewną miarą dyspersji. Niedogodność tę można wyeliminować przez zastosowanie jeszcze procedury standaryzującej.

Momenty skośnego rozkładu uzyskanego na podstawie wzoru (2.74) wynoszą:

$$E(\epsilon^k|\xi) = M_k \frac{\xi^{k+1} + \frac{(-1)^k}{\xi^{k+1}}}{\xi + \frac{1}{\xi}}, \quad (2.76)$$

gdzie:

$$M_k = 2 \int_0^\infty x^k g(x) dx \quad (2.77)$$

Dwa pierwsze momenty (średnia oraz wariancja) dane są więc wzorami:

$$E(\epsilon|\xi) = M_1 \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.78)$$

$$\text{var}(\epsilon|\xi) = (M_2 - M_1^2) \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) + 2M_1^2 - M_2. \quad (2.79)$$

Zastosowanie powyższych rozważań do rozkładu t-Studenta prowadzi do otrzymania **standaryzowanego skośnego rozkładu t-Studenta**.

Zakładając, że gęstość rozkładu $g(\cdot)$ jest rozkładem t-Studenta o zerowej średniej, jednostkowej wariancji oraz ν stopniach swobody, dwa pierwsze momenty rozkładu $f(\epsilon|\xi, \nu)$ dane są wzorami (por. Lambert, Laurent):

$$m = E(\epsilon|\xi, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \quad (2.80)$$

$$s^2 = \text{var}(\epsilon|\xi, \nu) = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2. \quad (2.81)$$

Dokonując standaryzacji zmiennej ϵ_t według wzoru:

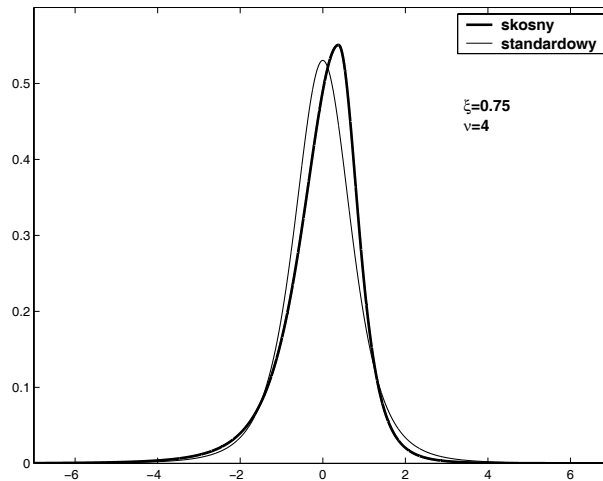
$$z_t = \frac{\epsilon_t - m}{s} \quad (2.82)$$

uzyskujemy poszukiwaną modyfikację z_t , która posiada zerową średnią, jednostkową wariancję oraz funkcję gęstości rozkładu będącą standaryzowanym skośnym rozkładem t-Studenta o postaci:

$$f(z|\xi, \nu) = \frac{2s}{\xi + \frac{1}{\xi}} \left\{ g\left[\xi(s z + m)|\nu\right] I_{(-\infty, 0)}\left(z + \frac{m}{s}\right) + g\left[\frac{s z + m}{\xi}|\nu\right] I_{[0, \infty)}\left(z + \frac{m}{s}\right) \right\} \quad (2.83)$$

Na rysunku 2.12. przedstawiono skośny rozkład t-Studenta uzyskany według procedury zaproponowanej przez Fernandez i Steela dla parametrów $\xi = 0,75$ oraz $\nu = 4$. Jest to rozkład standaryzowany o średniej równej zero oraz wariancji równej jeden. Obok przedstawiono standaryzowany symetryczny rozkład t-Studenta również o 4 stopniach swobody.

Rysunek 2.12: Przykładowy, standaryzowany, skośny rozkład t-Studenta



Źródło: opracowanie własne.

Skośny standaryzowany rozkład t-Studenta zawiera także wszelkie standardowe rozkłady t-Studenta. Jest to bardzo wygodny w wykorzystaniu rozkład, pozwalający modelować dwie, bardzo znaczące cechy rozkładów empirycznych - grube ogony i skośność. Jest to nowa propozycja, której znaczenie w modelowaniu szeregów finansowych (odnośnie rozkładów bezwarunkowych i warunkowych) dopiero zaczyna być doceniane (por. Pipień i Osiewalski (1999), Peters (2001), Lambert i Laurent (2001)). Rozkład ten bywa stosowany zarówno w wersji standaryzowanej, jak i niestandaryzowanej, co skutkuje, że odpowiednie parametry (warunkowe lub bezwarunkowe) modelu (2.50) nie oznaczają średniej oraz odchylenia standardowego, a jedynie modalną oraz pewną miarę dyspersji (por. Pipień i Osiewalski (1999)).

Pomimo dość skomplikowanej postaci wzoru funkcji gęstości standaryzowanego skośnego rozkładu t-Studenta, jego aplikacja nie następuje większych trudności. Parametry modelu wyznacza się metodą największej wiarygodności.

Jak już zostało zasygnalizowane wcześniej, procedura wyznaczania parametrów podstawowego modelu (2.50) za pomocą metody największej wiarygodności dla podstawowych wykorzystywanych rozkładów (normalnego, t-Studenta, GED, skośnego t-Studenta oraz mieszanek rozkładów) zaprezentowana zostanie w dalszej części pracy po wprowadzeniu zmiennych w czasie parametrów średniej μ_t oraz zmienności σ_t .

2.7.3. Inne propozycje w zakresie rozkładów stóp zwrotu

Rozkłady α -stabilne

Co prawda rozkłady α -stabilne nie mieszczą się w swej ogólności (poza przypadkiem granicznym) w klasie rozkładów o możliwej do uzyskania jednostkowej wariancji, które mogłyby stanowić poszukiwane uogólnienie rozkładu normalnego, lecz ze względu na ich popularność w modelowaniu rozkładów stóp zwrotu, zostaną ogólnie zaprezentowane, jako kierunek kolejnych możliwych rozwiązań.

Rodzina rozkładów stabilnych odkryta została w latach trzydziestych XX wieku przez Paula Lévy'ego, jednak propozycję zastosowania tych rozkładów do modelowania rozkładów stóp zwrotu wysunął B. Mandelbrot (por. Mandelbrot (1963)) oraz podtrzymał Fama (por. Fama (1965)). Empirycznie udowodnione występowanie lep-

tokurtozy oraz grubych ogonów w dużej grupie analizowanych szeregów stóp zwrotu, a przed wszystkim fakt, że estymatory odchylenia standardowego stóp zwrotu nie zbiegają do pewnej wartości nawet dla bardzo dużych prób, pozwoliło im odrzucić hipotezę o normalności rozkładów stóp zwrotu i zaproponować zastosowanie alternatywnej klasy rozkładów do opisu gęstości rozkładów stóp zwrotu.

Nazwa rozkłady „stabilne” związana jest z własnością, że suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie α -stabilnym (i takim samym parametrze α) jest również zmienną losową o rozkładzie α -stabilnym. Przyczyną zainteresowania rozkładami α -stabilnymi stał się fakt, że są one uogólnieniem rozkładu normalnego, lecz umożliwiając modelowanie grubych ogonów oraz znacznej kurtozy. Niestety poza trzema przypadkami (rozkład normalny, rozkład Cauchy’ego, rozkład Lévy’ego), nie są znane jawne postaci rozkładu funkcji gęstości rozkładów stabilnych, co jest podstawowym utrudnieniem w stosowaniu tej klasy rozkładów statystycznych. W pracy Nolana przedstawione zostały wzory umożliwiające wyznaczenie numeryczne funkcji gęstości oraz dystrybuanty dowolnych rozkładów stabilnych, lecz są to wzory o bardzo skomplikowanej postaci, zawierające skomplikowane całki, przez co ich zastosowanie choćby przy estymacji parametrów rozkładu jest znacznie ograniczone (por. Nolan (1997)).

Rozkłady α -stabilne definiowane są przez funkcję charakterystyczną. Zmienna losowa ma rozkład α -stabilny, jeśli przy określonych warunkach nałożonych na parametry rozkładu jej funkcja charakterystyczna ma postać:

$$\phi(t) = \begin{cases} \exp \left[i\mu t - |\sigma t|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \exp \left[i\mu t - |\sigma t|^\alpha \left(1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t| \right) \right] & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases}, \quad (2.84)$$

gdzie:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 1 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Parametry rozkładu muszą spełniać dodatkowo następujące warunki:

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad \sigma > 0 \text{ oraz } \mu \in \mathbb{R}.$$

Najważniejszym parametrem jest parametr α zwany **indeksem stabilności** (por. str. 75). Określa on grubość ogonów rozkładu. Jeśli rośnie indeks stabilności, to maleje

efekt grubych ogonów rozkładu. Dla $\alpha = 2$ uzyskuje się rozkład normalny. Jeśli zmienna X ma rozkład α -stabilny, to $E[X]^k < \infty$ dla $k < \alpha$ i $E[X]^k = \infty$ dla $\alpha \leq k < 2$. Rozkład normalny jest więc jedynym rozkładem α -stabilnym o skończonej wariancji. Rozkład normalny jest rozkładem α -stabilnym o najlżejszych ogonach.

Pozostałe parametry rozkładów stabilnych to:

β - parametr skośności; dla $\beta > 0$ rozkład jest prawostronnie skośny, dla $\beta = 0$ rozkład jest symetryczny, natomiast dla $\beta < 0$ rozkład jest lewostronnie asymetryczny,

μ - parametr przesunięcia, dla $\alpha > 1$ parametr ten odpowiada wartości oczekiwanej rozkładu,

σ - parametr skali rozkładu. Jeśli mamy dwie zmienne losowe α -stabilne X i Y o tym samym indeksie stabilności oraz parametrach skali odpowiednio σ oraz 1, to $X \stackrel{d}{=} \sigma Y$ ($\stackrel{d}{=}$ oznacza zgodność co do dystrybuanty).

Jedną z metod estymacji parametrów rozkładów stabilnych jest metoda oparta bezpośrednio na funkcji charakterystycznej rozkładu. Parametry rozkładu uzyskuje się poprzez minimalizację wyrażenia:

$$\Phi(\alpha, \beta, \sigma, \mu) \equiv \sup_t \left| \hat{\phi}_n(t) - \phi(t) \right| \quad (2.85)$$

gdzie:

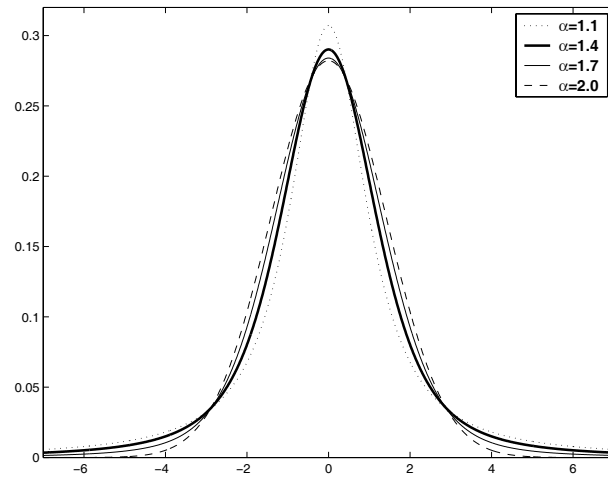
$$\hat{\phi}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp[itr_k] \quad (2.86)$$

jest empiryczną funkcją charakterystyczną niezależnych obserwacji r_1, r_2, \dots, r_n .

Szereg innych metod estymacji parametrów rozkładów α -stabilnych wraz z porównaniem zaprezentowanych zostało w pracy R. Weron (por. Weron (1995)).

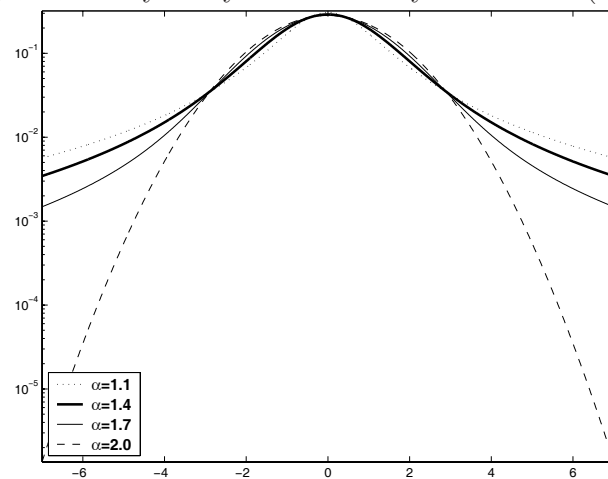
Na rysunkach 2.13. oraz 2.15. przedstawiono przykładowe funkcje gęstości rozkładu stabilnego. Przedstawiono rozkłady o różnej grubości ogonów (różna wartość parametru α) oraz rozkłady skośne (różne wartości parametru β dla tej samej wartości α). Rysunek 2.14. prezentuje efekt grubych ogonów rozkładu na rysunku ze skalą logarytmiczną.

Rysunek 2.13: Przykładowe symetryczne rozkłady α -stabilne (skala liniowa)

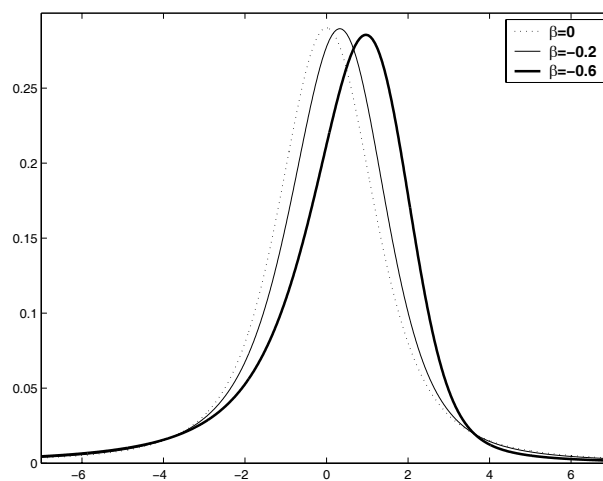


Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.14: Przykładowe symetryczne rozkłady α -stabilne (skala logarytmiczna)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.15: Przykładowe asymetryczne rozkłady α -stabilne (skala liniowa)

Źródło: opracowanie własne.

Przykład wykorzystania rozkładów α -stabilnych do opisu rozkładów stóp zwrotu z różnych instrumentów finansowych znaleźć można na przykład w pracach Sacała (por. Sacała (1992)), Rejmana (por. Rejman (1997)) oraz Weron i Weron (por. Weron i Weron (1998)).

Rozkłady wartości ekstremalnych

Kolejnym podejściem, które nie mieści się wprost w analizowanej w tym podrozdziale koncepcji jest **teoria wartości ekstremalnych** (*Extreme Value Theory - EVT*). W podejściu tym modelowane są jedynie ogony rozkładów, a nie jak wcześniej całe rozkłady. Rosnąca jednak popularność tej teorii w zarządzaniu ryzykiem finansowym oraz możliwość, pod pewnymi warunkami, adaptacji w analizowanych modelach, usprawiedliwia jej zaprezentowanie.

Teoria wartości ekstremalnych ma swoje korzenie w zagadnieniach związanych z hydrologią, gdzie stosowana była do określania np. jak wysokie powinny być umocnienia nabrzeżne, by zabezpieczały przed tzw. sztormem stulecia bądź wodą stulecia. Dopiero później EVT została adaptowana do zagadnień związanych z ubezpieczeniami oraz z zarządzaniem ryzykiem finansowym.

Jak już zostało zasygnalizowane, jest to podejście odmienne od prezentowanego wcześniej, gdy rozpatrywane były całe rozkłady prawdopodobieństwa realizacji określonego zdarzenia. W tym przypadku zainteresowanie skupia się jedynie wokół wartości tworzących ogony rozkładów, tzw. wartości ekstremalnych. W koncepcji tej, przez wartości ekstremalne rozumie się nie tylko obserwacje będące minimum, lub

maksimum w danym zbiorze, ale wszystkie obserwacje leżące poza przedziałem kilku odchyłeń standardowych od średniej. Najczęściej przyjmuje się tutaj przedział 4 odchyłeń standardowych. Nieuwzględnienie tych ekstremalnych obserwacji (traktując je jako zdarzenia nietypowe (*outliers*)), jak się to czasami czyni przy wykorzystaniu odpornych metod statystycznych lub bagatelizowanie możliwości ich wystąpienia, może być przyczyną niedoszacowania ryzyka, a w konsekwencji znacznych problemów finansowych instytucji finansowych z bankructwem włącznie.

Podstawowe rozważania dotyczące EVT zawarte są w książce Embrechtsa, Klüppelberga oraz Mikoscha (por. Embrechts, Klüppelberg, Mikosch (1997)). Pojawiło się również wiele artykułów dotyczących wprost zastosowania teorii wartości ekstremalnych w dziedzinie zarządzania ryzykiem finansowym poprzez zastosowanie tej teorii w pomiarze ryzyka metodami *VaR* oraz *Expected Shortfall*. Spośród wielu prac wymienić można prace McNeila (por. McNeil (1999), (2000)), Bensalaha (por. Bensalah (2000)), Këlleziego i Gilliego (por. Këllezi, Gilli (2000)) oraz Jajugi (por. Jajuga (2001b)). Wiele ciekawych prac z tego zakresu znaleźć można w serwisie internetowym poświęconym mierze *VaR* na stronie www.gloriamundi.org. Praktyczne zastosowanie teorii wartości ekstremalnych w pomiarze ryzyka instrumentów finansowych na rynku polskim znaleźć można np. w pracy Jajugi, Kuziak, Papli, Rokity (analiza akcji i indeksów) (por. Jajuga, Kuziak, Papla, Rokita (2001)) oraz Rokity (analiza warrantów opcyjnych) (por. Rokita (2000)).

W świetle wyników badań empirycznych, konieczność uwzględniania w rozkładach stóp zwrotu wartości ekstremalnych staje się coraz bardziej oczywista.

W ramach EVT wyróżnić możemy dwa główne podejścia:

- metody analizy tzw. rozkładów wartości ekstremalnych (*extreme value distributions* - **EVD**, *block maxima models*),
- metody oparte na analizie obserwacji powyżej (poniżej) pewnego wysokiego (niskiego) progu, czyli analizie obserwacji pochodzących z ogona rozkładów (*peaks over threshold models* - **POT**).

Chronologicznie pierwsza była metoda oparta na maksimach i minimach realizacji pochodzących z dużych próbek o identycznych rozkładach. Zastosowanie tej metody jest stosunkowo proste i łatwe w interpretacji. Dysponując na przykład informacją o maksymalnych stratach dziennych lub tygodniowych, przybliża się rozkład pozwalający oszacować rozkład maksymalnych strat w przyszłości na przestrzeni kwartału,

czy też roku. Podejście to koresponduje w prosty sposób z koncepcją **testów wartości skrajnych** (*stress tests*) (por. Best (2000), Jorion (2001)), która jest uzupełnieniem metody pomiaru ryzyka wg koncepcji *VaR*.

Technika ta opiera się na twierdzeniu Fishera i Tippeta (por. Fisher, Tippeta (1928)) oraz twierdzeniu Gnedenki z 1943 roku (por. Bradley i Taqqu (2001)).

Twierdzenie Fishera-Tippeta

Rozpatrzmy ciąg zmiennych losowych $\{Y_t\}$, które są niezależne i mają identyczne rozkłady. Podzielmy ten ciąg na k podciągów o równej długości n .

Dla $j = 1, 2, \dots, k$ wyznaczamy maksimum z n obserwacji dla każdego z podciągów:

$$M_n^{(j)} = \max(Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, Y_3^{(j)}, \dots, Y_n^{(j)}). \quad (2.87)$$

Jeśli istnieją stałe a_n i b_n takie, że wraz ze wzrostem długości podciągów n , rozkład $(M_n - b_n)/a_n$ zbiega do dystrybuanty G :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) = G(z), \quad (2.88)$$

to ta dystrybuanta należy do jednego z trzech rozkładów:

- **rozkładu Fréchet:**

$$G_F(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq 0 \\ \exp(-z^{-\alpha}) & \text{dla } z > 0 \end{cases}; \quad \alpha > 0 \quad (2.89)$$

- **rozkładu Weibulla:**

$$G_W(z) = \begin{cases} \exp(-(-z)^\alpha) & \text{dla } z \leq 0 \\ 0 & \text{dla } z > 0 \end{cases}; \quad \alpha > 0 \quad (2.90)$$

- **rozkładu Gumbela:**

$$G_G(z) = \exp(-\exp(-z)); \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.91)$$

Rozkład Fréchet jest rozkładem prawostronnie skośnym, rozkład Weibulla rozkładem lewostronnie skośnym, a rozkład Gumbela rozkładem symetrycznym. Największą popularność w finansach i ubezpieczeniach zyskał rozkład Fréchet, stosowany do modelowania grubych ogonów rozkładów strat.

Powyższe trzy rozkłady można zapisać w postaci ogólnej z parametrem kształtu danym współczynnikiem ξ . Pamiętając, że rozkłady powyższe są rozkładami standaryzowanymi, czyli:

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}, \quad (2.92)$$

gdzie μ to parametr położenia, a σ - parametr skali, **uogólniony rozkład wartości ekstremalnej** (*Generalized Extreme Value Distribution - GEVD*) dany jest wzorem:

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(1 + \xi \frac{y - \mu}{\sigma} \right)_+^{-\frac{1}{\xi}} \right] & \text{dla } \xi \neq 0 \\ \exp \left[- \exp \left(-\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right] & \text{dla } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.93)$$

gdzie $(x)_+ = \max(0, x)$.

Wartość parametru ξ decyduje o kształcie rozkładu. Im większa wartość bezwzględna parametru kształtu, tym „grubsze” ogony rozkładu.

Twierdzenie Gnedenki określa warunki, jakie musi spełniać funkcja F , by rozkład standaryzowanych maksimów zbiegał do rozkładu GEV , co oznacza się przez²⁰ $F \in MDA(G_\xi)$.

Twierdzenie Gnedenki

Dystrybuanta $F \in MDA(G_\xi)$, dla $\xi > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bar{F}(y) = 1 - F(y) = y^{-\frac{1}{\xi}} L(y) \quad (2.94)$$

dla pewnej wolno zmieniającej się funkcji $L(y)$.

Funkcję $L(y)$ nazywamy wolno zmieniającą się, gdy:

$$\bigvee_{t>0} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{L(ty)}{L(y)} = 1. \quad (2.95)$$

Z porównania wzoru (2.93) z wzorami (2.89), (2.90) i (2.91) wynika, że dla:

- $\xi > 0$, mamy do czynienia z rozkładem Fréchet’a ($\xi = \alpha^{-1}$),

²⁰(F is in the Maximum Domain of Attraction of G - MDA .)

- $\xi < 0$, mamy do czynienia z rozkładem Weibulla ($\xi = -\alpha^{-1}$),
 - $\xi \rightarrow 0$, rozkład GEV zbiega do rozkładu Gumbela,
- gdzie α jest indeksem grubości ogona.

GEVD stosuje się, gdy nie można określić typu rozkładu maksimów. Parametry ξ , μ i σ estymuje się metodą największej wiarygodności lub poprzez zastosowanie procedur uproszczonych. Uproszczenie polega na estymacji parametru położenia oraz skali, standaryzacji danych według wzoru (2.92), a następnie szacowaniu tylko na podstawie zestandaryzowanych danych parametru kształtu. Do estymacji parametru kształtu wykorzystuje się klasyczne estymatory, np. estymator Hilla (por. Hill (1975)), estymator Pickandsa (por. Pickands (1975)), bądź estymator Dekkersa-Einmahla-de Haana (por. Dekkers, Einmahl, de Haan (1989)). Podsumowanie własności tych estymatorów oraz przykłady zastosowań znaleźć można w pracy Werona (por. Weron (1998)). Ze względu na problemy ze stabilizowaniem się estymatorów grubości ogonów, częściej zaleca się metodę największej wiarygodności. Odpowiednia procedura oraz postać maksymalizowanej funkcji wiarygodności przedstawione została np. w pracy Këlleziego i Gilliego (por. Këllezi, Gilli (2000)).

Drugim podejściem w ramach teorii zdarzeń ekstremalnych są modele wykorzystujące obserwacje powyżej pewnego wysokiego progu (lub analogicznie dla drugiego ogona rozkładu poniżej pewnego niskiego progu). Jest to grupa narzędzi wykorzystywanych również w zakresie pomiaru ryzyka finansowego przy pomocy miar zagrożenia (VaR i ES).

Ponieważ potencjalne straty przedstawiane są ze znakiem dodatnim, rozważania prowadzi się w kontekście prawego ogona rozkładu strat, co odpowiada w rzeczywistości lewemu ogonowi rozkładu stóp zwrotu.

Oznaczmy przez zmienną L tym razem wielkość strat w rozważanym okresie. Zmienna L charakteryzuje się nieznaną dystrybuantą F . Przedstawiana metoda umożliwia przybliżenie dystrybuanty F dla argumentów bardzo odległych od średniej, czyli w ogonie. Pomocne w tym zadaniu będzie pojęcie warunkowej dystrybuanty.

Warunkowa dystrybuanta, że zmienna L (strata) przekroczy zadany próg u o wielkość y dana jest wzorem:

$$F_u(y) = P(L - u \leq y | L > u), \quad (2.96)$$

dla $0 \leq y \leq l_F - u$, gdzie $l_F \leq \infty$ jest kresem górnym zbioru stanowiącego dziedzinę funkcji F .

Warunkowa dystrybuanta wyrażana jest w odniesieniu do dystrybuanty F wzorem:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(l) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (2.97)$$

Po przekształceniu powyższego wzoru, szacowana dystrybuanta F wyraża się wzorem:

$$F(l) = (1 - F(u)) F_u(y) + F(u). \quad (2.98)$$

Ponieważ realizacje zmiennej L leżą głównie w przedziale $[0, u]$, wyznaczenie wartości $F(u)$ nie stanowi zwykle problemu i estymator $\hat{F}(u)$ przyjmuje postać:

$$\hat{F}(u) = \frac{n - N_u}{n}, \quad (2.99)$$

gdzie:

n - liczba wszystkich obserwacji,

N_u - liczba obserwacji przekraczających próg u .

Problemem jest natomiast estymacja warunkowej dystrybuanty F_u , gdyż w obszarze powyżej progu u obserwuje się niewielką liczbę obserwacji.

Pomocne okazuje się twierdzenie Pickandsa (por. Pickands (1975)) oraz Belkemy i de Haana (por. Belkema, de Haan (1974)).

Twierdzenie Pickandsa, Belkemy, de Haana

Dla szerokiej klasy rozkładów (obejmującej np. rozkład normalny, log-normalny, χ^2 , t-Studenta, F, gamma, beta, wykładniczy) istnieje funkcja $\beta(u)$ taka, że wraz ze wzrostem progu u , dystrybuanta $F_u(y)$ zbiega do dystrybuanty $G_{\xi, \beta(u)}(y)$:

$$\lim_{u \rightarrow x_F} \sup_{0 \leq y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0, \quad (2.100)$$

gdzie:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & \text{dla } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \text{dla } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

$\beta > 0, y \geq 0$ dla $\xi \geq 0$ oraz $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ dla $\xi < 0$.

Współczynnik ξ jest parametrem kształtu, a β to parametr skali.

Wzór (2.101) nazywa się **uogólnionym rozkładem Pareto** (*Generalized Pareto Distribution - GPD*), a jego szczególne przypadki to:

- dla $\xi > 0$, rozkład Pareto z grubymi ogonami,
- dla $\xi = 0$, rozkład wykładniczy,
- dla $\xi < 0$, tzw. rozkład Pareto typu II.

Na podstawie wzorów (2.98),(2.99), (2.100) i (2.101), dystrybuanta $F(l)$ w ogonie rozkładu ma postać:

$$F(l) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\xi}{\beta}(l - u) \right)^{-\frac{1}{\xi}}. \quad (2.102)$$

Oczywiście chcąc otrzymać funkcję gęstości rozkładu w ogonie wystarczy wyznaczyć pochodną z funkcji $F(l)$ względem zmiennej L .

Należy jednak pamiętać, że tak opisaną funkcją dystrybuanty, bądź gęstości rozkładu można się posługiwać jedynie dla $l > u$.

Także w tym przypadku parametry funkcji $F(l)$ estymuje się za pomocą funkcji największej wiarygodności lub za pomocą metod uproszczonych, wykorzystujących estymatory grubości ogonów (por. Këllezli i Gilli (2000), Weron i Weron (1998)).

W obu prezentowanych metodach największym kłopotem jest fakt, że odpowiednie parametry modeli szacuje się na podstawie niewielkiej liczby obserwacji. W metodzie pierwszej, szereg należy podzielić na podokresy o równej długości, a następnie dla każdego podokresu wyznaczyć jedną maksymalną obserwację. Im dłuższe podokresy, tym lepsza zbieżność rozkładu maksimumów do rozkładu GEV, lecz mniej obserwacji do estymacji parametrów rozkładu. Natomiast dla metody drugiej, im wyższy próg u , tym lepsza zbieżność warunkowej dystrybuanty rozkładu do rozkładu GPD, lecz mniej obserwacji do estymacji parametrów rozkładu, co może skutkować błędami w oszacowaniu parametrów. Odpowiedni wybór długości bloku oraz progów jest kluczowym zagadnieniem przy stosowaniu tych narzędzi.

Mieszanki rozkładów

Podejście oparte na założeniu, że rozkład stóp zwrotu można przybliżyć mieszanką rozkładów normalnych postulowane było już w wielokrotnie przywoływanej pracy

Fama z 1965 roku. Fama zakładał, że efekt grubych ogonów spowodowany jest faktem, że pomiędzy zamknięciem giełd w piątek a otwarciem w poniedziałek mijają trzy dni kalendarzowe, ale tylko jeden „dzień” sesyjny, co powoduje gromadzenie informacji, które mogą wpływać na kursy i powinno skutkować trzykrotnie większą wariancją stóp zwrotu przez weekend. Zagadnienie to sygnalizowane było na str. 76, jako jeden z przejawów tzw. efektów kalendarzowych. Fama zaproponował, aby osobno modelować stopy zwrotu przez weekend, poprzez wprowadzenie drugiego rozkładu o większej wariancji. Badania empiryczne nie potwierdziły jednak hipotezy Famy. Nie zaobserwowano występowania trzykrotnie większej wariancji przez weekend w stosunku do pozostałych dni. Także rozkłady stóp zwrotu dla okresów weekendowych oraz osobno pozostałych dni tygodnia nie charakteryzowały się rozkładem normalnym i posiadały grube ogony. Było to powodem odrzucenia przez Famę założenia, że występowanie grubych ogonów można wytłumaczyć tak rozumianą mieszanką rozkładów normalnych.

Sama koncepcja modelowania rozkładów stóp zwrotu poprzez mieszanki rozkładów normalnych nie uległa zapomnieniu. Zmieniło się tylko jedno - określenie punktu czasu, w którym stopa zwrotu pochodzi z innego rozkładu. W propozycji Famy, punktem tym były wszystkie dni sesyjne, które w dniach kalendarzowych liczyły więcej niż jeden dzień. Im więcej dni kalendarzowych, tym większa wariancja przyjmowanego rozkładu błędu modelu z_t . W późniejszych propozycjach, punkt ten obierany był losowo. W odróżnieniu od koncepcji Famy, która miała za zadanie opisać efekt gromadzenia się informacji przez dni nietransakcyjne, w tym przypadku model opisuje wpływ nagłych, a niespodziewanych informacji.

W najprostszej formie, koncepcję tę można opisać w następujący sposób:

$$r_t = \begin{cases} \mu_1 + \sigma_1 z_t & \text{z prawdopodobieństwem } p \\ \mu_2 + \sigma_2 z_t & \text{z prawdopodobieństwem } (1 - p) \end{cases} \quad \sigma_2 > \sigma_1, p \gg 0.5 \quad (2.103)$$

lub w postaci:

$$r_t \sim p N(\mu_1, \sigma_1) + (1 - p) N(\mu_2, \sigma_2) \quad (2.104)$$

Ten sam model zapisuje się również w postaci:

$$r_t = \mu + \sigma z'_t, \quad (2.105)$$

gdzie:

$$z'_t \sim \begin{cases} N(0, 1) & \text{z prawdopodobieństwem } p \\ N(\kappa, \delta) & \text{z prawdopodobieństwem } (1 - p) \end{cases} \quad (2.106)$$

W metodzie tej można więc przyjąć, że stopa zwrotu kształtowana jest przez dwa czynniki:

strukturalny - reprezentowany przez rozkład normalny z większym prawdopodobieństwem ($p \gg \frac{1}{2}$), opisujący typowe zachowanie stóp zwrotu,

losowy - występujący z mniejszym prawdopodobieństwem i opisujący nietypowe zachowanie stóp zwrotu.

W pracy Moixa analizie poddany został najprostszy model mieszanki rozkładów normalnych o parametrach $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ oraz $p = \frac{1}{2}$ w celu wykazania, iż taki rozkład cechuje się leptokurtozą i grubymi ogonami (por. Moix (2001)). Współczynnik kurtozy takiego rozkładu dany jest wzorem:

$$\kappa = 3 \left(1 + \frac{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \right) > 3, \quad (2.107)$$

co jest potwierdzeniem możliwości modelowania rozkładów o grubych ogonach mieszankami rozkładów normalnych.

Odmienna wersja modelu z mieszaniną rozkładów normalnych zaprezentowała przez Zangarię do pomiaru ryzyka metodą *VaR* (por. Zangari (1996)). W sposób trochę bardziej ogólny niż proponował autor, model ten można zapisać w postaci:

$$r_t = \mu_1 + \sigma_1 z_{1,t} + \pi_t (\mu_2 + \sigma_2 z_{2,t}), \quad (2.108)$$

gdzie:

$$z_{1,t} \sim N(0, 1) \quad z_{2,t} \sim N(0, 1) \quad (2.109)$$

$$P(\pi_t = 1) = 1 - P(\pi_t = 0) = p \quad (2.110)$$

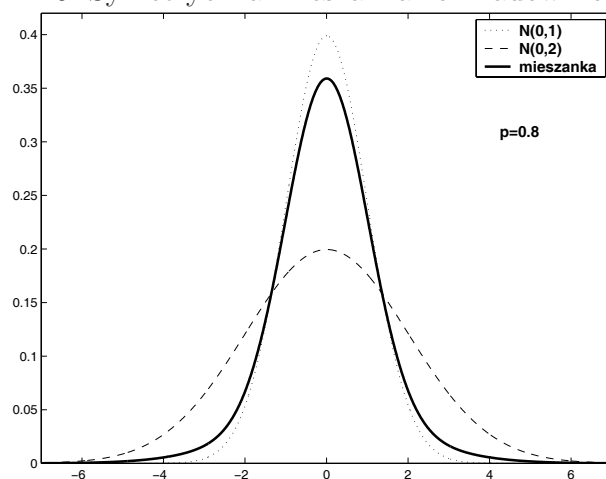
W obydwu zaprezentowanych metodach, parametry rozkładów mogą być funkcjami czasu.

Metody te pozwalają na modelowanie zarówno rozkładów symetrycznych ($\mu_1 = \mu_2$), jaki i rozkładów asymetrycznych ($\mu_1 \neq \mu_2$). Choć rozkłady te są mieszanką rozkładów normalnych, to w ogólnym przypadku nie są rozkładami normalnymi²¹.

Na rysunkach 2.16. oraz 2.17. przedstawiono przykładowe funkcje gęstości rozkładów będących mieszankami rozkładów normalnych w przypadku z równymi parametrami μ oraz w przypadku asymetrycznym z różnymi średnimi rozkładów.

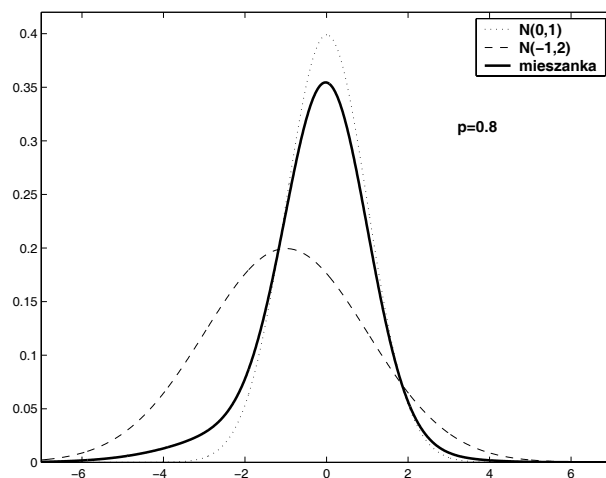
W powyższych modelach estymacji podlegają zarówno parametry rozkładów μ_1 , μ_2 , σ_1 i σ_2 , jak i prawdopodobieństwo, że obserwacja będzie pochodzić z określonego rozkładu.

Rysunek 2.16: Symetryczna mieszanka rozkładów normalnych



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.17: Skośna mieszanka rozkładów normalnych



Źródło: opracowanie własne.

²¹Rozkład wynikowy jest rozkładem normalnym tylko w przypadku trywialnym, gdy $\mu_1 = \mu_2$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2$.

Kolejnym, znacznie ciekawszym przykładem dającym się sprowadzić do mieszanki rozkładów, i z tego powodu opisywanym w tym miejscu pracy, jest model zwany w literaturze **modelem skoku i dyfuzji** (*jump-diffusion model*).

Model ten umożliwia opis nieciągłości w trajektoriach cen. Odnosi się to do modeli z czasem ciągłym. W modelach stóp zwrotu z czasem dyskretnym, które rozpatrujemy w tym podrozdziale, umożliwia on modelowanie pojawiających się w sposób nieprzewidywalny zdarzeń rzadkich polegających na występowaniu szczególnie dużych (co do wartości absolutnych) stóp zwrotu. Efekt ten obserwowany jest silniej na rynkach walutowych, niż na rynkach akcji (por. Jorion (1988)). Jest to kolejny model umożliwiający opis rozkładów z grubymi ogonami.

Powracając do rozważań z podrozdziału (2.3.)²², w ogólnej postaci proces ten dla czasu ciągłego zdefiniowany jest w sposób następujący (por. Kou (1984)):

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dB(t) + d \left(\sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1) \right), \quad (2.111)$$

gdzie:

$N(t)$ - ma rozkład Poissona ze współczynnikiem intensywności równym $\lambda' dt$ ($\lambda' > 0$) oznaczającym średnią liczbę skoków w podokresie dt ,

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda' dt} \frac{(\lambda' dt)^k}{k!} \quad (2.112)$$

$\{V_i\}$ - to ciąg niezależnych, identycznych, niezerowych zmiennych takich, że $Y_i = \ln(V_i)$ ma w najprostszym przypadku rozkład normalny $Y_i \sim N(\theta, \delta^2)$.

Model bardzo często w literaturze prezentowany jako *jump-diffusion* (por. Wil-mott (1999)) dany wzorem:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dB(t) + (V_i - 1)dq, \quad (2.113)$$

gdzie:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{z prawdopodobieństwem } 1 - \lambda' dt \\ 1 & \text{z prawdopodobieństwem } \lambda' dt \end{cases} \quad (2.114)$$

²²Zwyczajowo w modelach z czasem ciągłym parametry μ i σ wyrażone są w skali roku, a w modelach z czasem dyskretnym, wyrażone są one w skali odcinka czasu pomiędzy poszczególnymi punktami czasu (najczęściej w skali jednego dnia), co pozwala opuścić w zapisie modeli czynnik Δt . Ta drobna niekonsekwencja zachodzi również w poniższych modelach.

jest jedynie przybliżeniem wzoru (2.111) zakładającym, że w ciągu czasu dt może wystąpić co najwyżej jeden skok.

Odpowiednikiem procesu (2.111) jest dla przypadku z czasem dyskretnym model (por. Press (1968), Kou (1984), Moix (2001))²³:

$$r_t = \mu + \sigma z_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (2.115)$$

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^k}{k!}, \quad (2.116)$$

$$Y_i \sim N(\theta, \delta^2). \quad (2.117)$$

Warto zaznaczyć, że z modelu (2.113) w wersji z czasem dyskretnym uzyskujemy prezentowany wcześniej model będący mieszanką dwóch rozkładów normalnych.

Stopy zwrotu (czy ogólnie dowolna zmienna losowa r_t) generowane przez model opisany równaniami (2.115), (2.116), (2.117) mają rozkład gęstości prawdopodobieństwa dany następującym wzorem (por. Moix (2001)):

$$f(r_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k N(\mu + k\theta, \sigma^2 + k\delta^2). \quad (2.118)$$

Na podstawie wzoru (2.118) można stwierdzić, iż rozpatrywany model jest nieskończoną mieszanką rozkładów normalnych uwzględnianych z prawdopodobieństwem pochodzącym z rozkładu Poissona, co usprawnia przedstawienie tego modelu w tym podrozdziale.

Funkcja gęstości jest leptokurtotyczna, o ile $\lambda > 0$ oraz jest symetryczna jeśli $\mu = \theta$.

W pracy Dasa oraz Sundarama (por. Das, Sundaram (1999)) zaprezentowane zostały wzory pozwalające określić średnią, wariancję, skośność oraz kurtozę rozkładu będącego wynikiem prezentowanego modelu. Wyniki te mogą być podstawą do szacowania parametrów modelu metodami parametrycznymi, jednak częściej wykorzystuje się metodę największej wiarygodności (por. Jorion (1988)).

Analizie podlegają również modele skoku i dyfuzji, w których w części związanej ze skokami, rozkład normalny zastępuje się innymi rozkładami, np. podwójnym

²³Także współczynnik intensywności podawany jest w tym przypadku w skali horyzontu stopy zwrotu, czyli $\lambda = \lambda' dt$.

rozkładem wykładniczym danym wzorem:

$$f_{Y_i}(x) = \frac{1}{2\eta} e^{-\frac{|x-\kappa|}{\eta}}, \quad 0 < \eta < 1. \quad (2.119)$$

Przyjęcie takiego rozkładu powoduje, że mieszanka rozkładów posiada bardziej wysmukłą postać wokół modalnej. W zależności od wartości parametru κ , możliwe jest uzyskiwanie rozkładów symetrycznych, prawo- lub lewostronnie skośnych. Model z rozkładem skoków opisanym wzorem (2.119) analizowany jest szeroko w pracy Kou (por. Kou (1999)).

Na zakończenie rozważań o kształcie funkcji gęstości standaryzowanych rozkładów stóp zwrotu, warto zaznaczyć, iż temat wcale nie został jeszcze przez badaczy zamknięty. Pojawiły się kolejne uogólnienia. W dotychczasowych rozważaniach zakładano, że kształt funkcji gęstości jest stały, tzn. o ile w danym rozkładzie występuje liczba stopni swobody, czy parametr skośności, to są one stałe w czasie, lecz tak być przecież nie musi. Parametry te mogą zostać uzależnione od czasu, a najprostszym rozwiązaniem pozostają zależności autoregresyjne, polegające na tym, że kształt rozkładu, np. grubość ogonów, czy skośność zależy w jakiś sposób od grubości ogonów, czy skośności w chwili poprzedniej. Jest to jednak podejście stosunkowo nowe i rzadko jeszcze stosowane (por. Hansen (1994), Harvey i Siddique (1999), (2000), Tauchen (2001)).

Podsumowując, w niniejszym podrozdziale zaprezentowanych zostało szereg rozwiązań w zakresie modelowania rozkładów stóp zwrotu. Tabela 2.2 prezentuje zestawienie podstawowych cech prezentowanych propozycji.

Tabela 2.2: Zestawienie cech rozkładów

Propozycje	Rozkłady
opisujące całe rozkłady	rozkłady: normalny, t-Studenta, skośny t-Studenta, GED, hiperboliczny, α -stabilny, mieszanki rozkładów
opisujące ogony rozkładów	rozkłady wartości ekstremalnych
symetryczne	rozkłady: normalny, t-Studenta, GED
o możliwej asymetrii	rozkłady: skośny t-Studenta, hiperboliczny, α -stabilny, mieszanki rozkładów
o możliwej do uzyskania jednostkowej wariancji	rozkłady: normalny, t-Studenta, skośny t-Studenta, GED, hiperboliczny, wartości ekstremalnych, mieszanki rozkładów
nieskalowalne do jednostkowej wariancji	rozkłady α -stabilne ($\alpha \neq 2$)

Źródło: opracowanie własne.

Wiele z tych rozwiązań znajduje zastosowanie nie w modelowaniu bezwarunkowych rozkładów stóp zwrotu, ale przede wszystkim - rozkładów warunkowych (por. podrozdział 2.9.).

Do modelowania szeregów finansowych (w zakresie rozkładów warunkowych, jak i bezwarunkowych) wykorzystuje się przede wszystkim rozkłady, które:

- opisują cały rozkład, a nie tylko ogon, jednak posiadają własności umożliwiające uwzględnienie zjawiska grubych ogonów,
- umożliwiają skalowanie do jednostkowej wariancji, co powodują że parametr σ jest wprost (warunkową lub bezwarunkową) zmiennością szeregu stóp zwrotu.

Ważną cechą może być również możliwość opisu skośności.

Wszystkie te własności posiadają, z zaprezentowanych rozkładów, jedynie rozkłady hiperboliczne oraz skośne rozkłady t-Studenta. Te ostatnie są propozycją względnie nową, jeszcze stosunkowo mało popularną, można się jednak spodziewać, że ze względu na ich własności oraz stosunkową łatwość estymacji parametrów, popularność ich będzie rosła w najbliższych latach (na początku niewątpliwie w teorii współczesnych finansów, a w przyszłości również w praktyce).

2.7.4. Niezależność z_t

Jak już zostało wspomniane, szeregi stóp zwrotu mogą cechować się autokorelacją bardzo wysokich rzędów, co oznacza długą pamięć procesów. Formalna definicja długoterminowej pamięci procesu wprowadzona zostanie w podrozdziale 2.8.2., w którym przedstawiony zostanie odmienny, częściej wykorzystywany sposób modelowania tego efektu poprzez procesy z klasy $ARFIMA(p, d, q)$.

W tym miejscu przedstawione zostaną jedynie podstawowe wiadomości o modelowaniu długookresowej pamięci procesu poprzez **ułamkowy ruch Browna**. Taki podział wynika z chęci zachowania struktury pracy oraz z faktu, iż pomimo tego, że co prawda zarówno ułamkowy ruch Browna, jak i modele $ARFIMA$ opisują to samo zjawisko, to robią to w odmienny sposób.

Pierwszym modelem umożliwiającym opis długoterminowej zależności danych był model ułamkowego ruchu Browna wprowadzony przez Mandelbrota i van Ness (por. Mandelbrot, van Ness (1968)). Podejście to jest uogólnieniem standardowego ruchu Browna polegającym na osłabieniu założenia o niezależności przyrostów procesu. Jest to intuicyjnie najprostsze podejście, gdyż modelowanie długiej pamięci dla czynnika losowego z_t w analizowanym modelu (2.50), automatycznie gwarantuje, że szereg stóp zwrotu r_t będzie cechował się taką samą własnością.

Definicja 2.13.

Ułamkowy ruch Browna - $\{B_H(t), t \geq 0\}$ to gaussowski proces zdefiniowany dla czasu ciągłego, z zerową średnią ($B_H(0) = 0$), stacjonarnymi przyrostami, którego wariancja dana jest wzorem:

$$\text{var}[B_H(t)] = E[B_H^2(t)] = t^{2H}, \quad H \in (0, 1) \quad (2.120)$$

a kowariancja:

$$\text{cov}[B_H(t), B_H(s)] = \frac{1}{2} (s^{2H} + t^{2H} - |s - t|^{2H}), \quad H \in (0, 1). \quad (2.121)$$

Jest to tzw. „proces samopodobny”, gdyż dla każdej stałej ($a > 0$) następuje równość co do dystrybuanty procesów $\{a^H B_H(t), t \geq 0\}$ oraz $\{B_H(at), t \geq 1\}$.

Stała H , zwana „indeksem samopodobieństwa”, decyduje o własnościach procesu.

Z punktu widzenia jednak modelowania szeregów stóp zwrotu bardziej interesującą jest proces przyrostów ułamkowego ruchu Browna:

$$dB_H(t) = B_H(t + dt) - B_H(t) \quad (\text{w wersji z czasem ciągłym}), \quad (2.122)$$

$$\Delta B_H(t) = B_H(t + \Delta t) - B_H(t) \quad (\text{w wersji z czasem dyskretnym}). \quad (2.123)$$

Proces przyrostów jest stacjonarnym, gaussowskim procesem, którego funkcja autokowariancji dla ($k \geq 0$) dana jest wzorem:

$$\gamma(k) = E[\Delta B_H(t), \Delta B_H(t + k\Delta t)] = \frac{1}{2} \Delta t^{2H} [(k + 1)^{2H} - 2k^{2H} - |k - 1|^{2H}], \quad (2.124)$$

a wariancja przyrostów:

$$\text{var}[\Delta B_H(t)] = \Delta t^{2H}. \quad (2.125)$$

Aby zachować więc zgodność z wzorem (2.31), należy przyrosty odpowiednio przeskalować tak, aby ich wariancja była równa Δt . Operacja ta nie zmienia jednak struktury autokorelacyjnej przyrostów umożliwiającą modelowanie długoterminowych zależności. Efekt długiej pamięci objawia się bowiem tym, że dla dużych odstępów, gdy $k \rightarrow \infty$, funkcja autokowariancji, a tym samym funkcja autokorelacji, wygasa asymptotycznie (co do stałej) zgodnie z wzorem:

$$\gamma(k) \sim H(2H - 1)k^{2H-2}, \quad (2.126)$$

o ile tylko $H \neq \frac{1}{2}$.

To właśnie fakt, że funkcja autokorelacji zanika powoli, tak jak funkcja hiperboliczna, umożliwia opis długiej pamięci procesów. Przypadek, gdy $H = \frac{1}{2}$, to standardowy ruch Browna o przyrostach niezależnych. W zastosowaniach finansowych, wykorzystuje się jedynie przypadek, gdy $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, co umożliwia modelowanie długoterminowej zależności przyrostów z efektem dodatniej korelacji.

Szeroki opis metod estymacji parametru H ułamkowego ruchu Browna znaleźć można w pracy Taqqu, Teverovsky’ego i Willingera (por. Taqqu, Teverovsky, Willinger (1995)), natomiast metody zastosowania ułamkowego ruchu Browna w modelowaniu finansowych szeregów czasowych oraz wycenie opcji znaleźć można w pracy Burneckiego (por. Burnecki (1998)).

Więcej na temat długoterminowej zależności danych przedstawione zostanie w podrozdziale 2.8.2. podczas prezentacji własności modeli z klasy *ARFIMA*, które w dziedzinie modelowania finansowych szeregów czasowych zdobyły znacznie większą popularność, a których funkcja autokorelacji zanika dla dużych odstępów również jak hiperbola.

2.8. Uogólnienia w zakresie μ

Do tej pory zakładano, że parametr μ w modelu (2.50) jest stały w czasie i oznacza wartość oczekiwaną procesu r_t , którą można oszacować jako

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t. \quad (2.127)$$

Jest to ściśle rzecz ujmując tzw. **bezwarunkowa wartość oczekiwana**, której estymatorem jest średnia arytmetyczna wyznaczana na podstawie wszystkich obserwacji, a w każdym razie dużego zbioru obserwacji. Jak już zostało zasygnalizowane wcześniej, w wielu zagadnieniach przyjmuje się, iż tak zdefiniowana wartość oczekiwana jest równa zero (szczególnie dla krótkich horyzontów stóp zwrotu). Najczęściej rozważanymi zależnościami są związki korelacyjne pomiędzy odpowiednio opóźnionymi szeregami stóp zwrotu.

W niektórych analizowanych szeregach czasowych obserwuje się bowiem, iż kolejne stopy zwrotu nie są niezależne. Po wzrostach (dodatnich stopach zwrotu) występują częściej kolejne wzrosty, a po spadkach (ujemne stopy zwrotu) kolejne spadki. Bywa, iż efekt ten jest na tyle silny, że nie uwzględnienie go w procesie modelowania stóp zwrotu może mieć znaczny wpływ na proces zarządzania ryzykiem. Przywołany efekt zależności objawia się dodatnią autokorelacją stóp zwrotu.

Zanim przytoczone zostaną prace potwierdzające efekt autokorelacji oraz metody modelowania tego zjawiska, niezbędne jest wprowadzenie pojęcia autokorelacji w kontekście procesów z czasem dyskretnym²⁴.

Często pojęcie autokorelacji definiuje się poprzez funkcję autokowariancji procesu.

Autokowariancją $\gamma(\cdot)$ rzędu k nazywa się kowariancję pomiędzy wartościami procesu r_t i $r_{t\pm k}$. Dysponując jedynie skończoną realizacją procesu stóp zwrotu o długości

²⁴W modelach z czasem ciągłym, w odpowiednich operatorach wartości oczekiwanych sumowanie zastąpione jest całkowaniem.

T , estymator autokowariancji dany jest wzorem:

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (r_t - \hat{\mu})(r_{t+k} - \hat{\mu}), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.128)$$

Dodatkowo zachodzi własność, iż $\gamma(k) = \gamma(-k)$.

Estymator autokorelacji $\rho(k)$ rzędu k dany jest zależnością²⁵:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}. \quad (2.130)$$

Ponieważ tak zdefiniowana autokorelacja jest przykładem współczynnika korelacji Pearsona, jest ona unormowana, a jej znak określa kierunek zależności. Własności asymptotyczne współczynnika autokorelacji znaleźć można np. w pracy Taylora (1986) (por. Taylor (1986)).

Prac dokumentujących występowanie efektu autokorelacji stóp zwrotu jest dużo. Do pierwszych zaliczyć należy niewątpliwie prace Famy (por. Fama (1965)) oraz Greene'a i Fielitza (por. Greene i Fielitz (1977)). Analizowali oni przede wszystkim autokorelację rzędu pierwszego i wykazali istnienie owej autokorelacji w szeregach stóp zwrotu. Dodatkowo dla szeregów stóp zwrotu z akcji wykazali, że autokorelacja dodatnia występuje dwa, trzy razy częściej niż ujemna. Silniejszymi zależnościami autokorelacyjnymi od pojedynczych akcji cechują się indeksy. Prace empiryczne w tym zakresie prowadził np. Officer (por. Officer (1975)). Dodatkowym zaobserwowanym faktem jest także częstsze występowanie ujemnej autokorelacji stóp zwrotu dla towarów, a przede wszystkim metali. Silne autokorelacje rzędów wyższych niż jeden występują rzadko i najczęściej mają znak ujemny. Szacuje się, iż jedynie dla 10% szeregów wyższe autokorelacje przekraczają co do wartości bezwzględnej 0,05 (por. Fama (1965), Taylor (1986)). Szerokie podsumowanie badań empirycznych dotyczących autokorelacji w szeregach stóp zwrotu dla różnych okresów, rynków, instrumentów znaleźć można w pracach Lo i Wanga (por. Lo i Wang (1995)), Cambella, Lo oraz MacKinlay'a (por. Cambell, MacKinlay (1997)), a także w cytowanej już pracy Taylora z 1986 roku.

²⁵Tak zdefiniowany estymator jest estymatorem nieobciążonym w przeciwieństwie do często spotykanej jego wersji:

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (r_t - \hat{\mu})(r_{t+k} - \hat{\mu})}{\sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})^2} \quad (2.129)$$

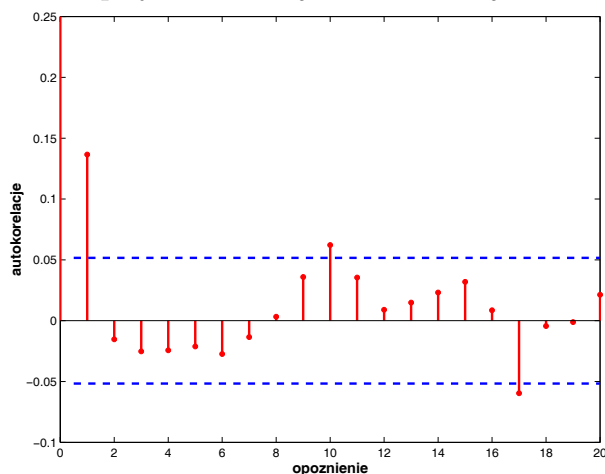
Wyniki dotyczące szeregów czasowych z rynku polskiego znaleźć można w wielu pracach, najczęściej w kontekście analizy słabej efektywności polskiego rynku kapitałowego (por. Jajuga (red.) (2000a), Czekaj, Woś, Żarnowski (2001)). Wnioski nie odbiegają od tych uzyskanych dla rynków zagranicznych. Dla szeregów stóp zwrotu z instrumentów notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie:

- większość autokorelacji rzędu pierwszego jest istotnie różna od zera,
- większość autokorelacji rzędu pierwszego jest dodatnia,
- większość autokorelacji rzędów wyższych niż jeden jest nieistotnie różna od zera.

Wnioski te pozostają niezmiennie, niezależnie od horyzontu analizowanych stóp zwrotu.

Na rysunku 2.18 przedstawiono funkcję autokorelacji dla indeksu WIG²⁶ dla opóźnień od 1 do 20. Linie przerywane, to poziomy autokorelacji dla istotności 0,05²⁷. Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, obserwujemy silną autokorelację rzędu pierwszego oraz znacznie już mniejsze współczynniki autokorelacji rzędów wyższych. Fakt, iż pojawiają się również istotne współczynniki korelacji dla opóźnień 10 i 17, nie znajduje wytłumaczenia na płaszczyźnie teorii. Należy jednak zaznaczyć, iż tak silny efekt autokorelacji rzędu pierwszego, nie zawsze jest obserwowalny dla innych indeksów, szczególnie z rynków lepiej rozwiniętych. Autokorelacje zależą też silnie od okresu, z którego pochodziły dane empiryczne.

Rysunek 2.18: Empiryczna funkcja autokorelacji dla indeksu WIG



Źródło: opracowanie własne.

W pracach Jajugi (por. Jajuga (red.) (2000a)) oraz Czekaja, Wosia, Żanowskiego

²⁶Próbie stanowiły jednodniowe logarytmiczne stopy zwrotu z okresu od 13.05.1996 do 15.05.2002 (1500 obserwacji).

²⁷Wykorzystuje się fakt, że $\sqrt{T}\hat{\rho}(k)$ ma rozkład asymptotyczny $N(0,1)$.

(por. Czekał, Woś, Żarnowski(2001)) przedstawiono również szereg testów służących do odnajdywania braku niezależności w szeregach stóp zwrotu (testy autokorelacji, statystyka Q Boxa-Pierce'a, testy serii, testy ilorazu wariancji). Powyższe testy zakładają stałość wariancji procesu w czasie, co w przypadku finansowych szeregów czasowych jest trudne do udowodnienia. Efekt heteroskedastyczności może silnie wpływać na wyniki testów. Odpowiedni test pozwalający badać autokorelację w przypadku heteroskedastyczności procesu stóp zwrotu zaprezentowany został przez Hafnera i Herwartz (por. Hafner i Herwartz (1998)).

Standardowo efekt autokorelacji stóp zwrotu próbuje się wyjaśniać istnieniem efektów kalendarzowych oraz przede wszystkim istnieniem premii za ryzyko, która powiązana jest ze zmienną wariancją procesu. W dalszej części pracy przedstawione zostaną modele klasy *ARCH-M* umożliwiające opis tego efektu. W modelach tych oczekiwana stop zwrotu w chwili t zależy od poziomu wariancji stóp zwrotu. Autokorelacja w szeregach warunkowej wariancji procesu powoduje więc autokorelację w szeregu stóp zwrotu (por. Das, Sarkar (2000)).

Hafner i Herwartz wykazali, że modele autoregresyjne, nie posiadające prostej interpretacji ekonomicznej, mogą lepiej dopasowywać się do danych empirycznych niż modele z premią za ryzyko (por. Hafner i Herwartz (1999)). Modele autoregresyjne łatwo zaimplementować w wielu zagadnieniach związanych z zarządzaniem ryzykiem, takich jak pomiar ryzyka metodą *VaR* (por. Jorion (2001)) lub wycena opcji (por. Hafner i Herwartz (1999)).

Od tej chwili μ_t oraz σ_t^2 oznaczać będą warunkową wartość oczekiwaną oraz warunkową wariancję procesu r_t wyznaczaną na podstawie określonego modelu oraz informacji dostępnej w chwili $(t - 1)$:

$$\mu_t = E[r_t | I_{t-1}], \quad (2.131)$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}[r_t | I_{t-1}], \quad (2.132)$$

gdzie I_{t-1} to informacja dostępna w chwili $t - 1$.

Zakłada się jednak stałość klasy warunkowego rozkład stóp zwrotu:

$$\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} = z_t \sim iid(0, 1). \quad (2.133)$$

Natomiast μ i σ oznaczać będą nadal w dalszej części pracy stałe. Niestety, w przypadku zmiennego parametru μ_t , parametr σ^2 **nie oznacza** bezwarunkowej wariancji

procesu r_t . Natomiast dla zmiennego parametru σ_t , parametr μ modelu zazwyczaj oznacza bezwarunkową średnią modelu²⁸.

Poniżej przedstawione zostaną podstawowe wiadomości o najczęściej analizowanej klasie stochastycznych, liniowych procesów autoregresji i średniej ruchomej (*ARMA*) oraz możliwych kierunkach jej uogólnień tj. zintegrowanych procesów autoregresji i średniej ruchomej (*ARIMA*) oraz ułamkowych zintegrowanych procesów autoregresji i średniej ruchomej (*ARFIMA*).

Aby umożliwić prosty i zwięzły opis modeli autoregresji i średniej ruchomej wprowadza się grupę prostych operatorów (por. Box i Jenkins (1983)):

- operator przesunięcia wstecz L :

$$Lr_t = r_{t-1} \quad (2.134)$$

$$L^m r_t = r_{t-m} \quad (2.135)$$

- operator różnicowy ∇ :

$$\nabla r_t = r_t - r_{t-1} = (1 - L)r_t \quad (2.136)$$

$$\nabla^d r_t = (1 - L)^d r_t \quad (2.137)$$

$$\text{np. } \nabla^2 r_t = (1 - L)^2 = (1 - 2L + L^2)r_t = r_t - 2r_{t-1} + r_{t-2}$$

Oprócz tych operatorów definiuje się także: operator przesunięcia w przód, operator sumowania oraz stabilny operator niestacjonarny umożliwiający opis modeli sezonowych. Nie będą one jednak wykorzystywane w tej pracy.

Podjęcie oparte na stacjonarnych procesach autoregresji i średniej ruchomej zakłada, że wartość procesu r_t może być wyrażona jako liniowa kombinacja poprzednich wartości procesu oraz r_{t-k} oraz liniowej kombinacji reszt modelu ε_{t-k} (dla $k = 0, 1, 2, \dots$).

2.8.1. Procesy *ARMA*

W przypadku, gdy wartość procesu w chwili t jest opisywana wyłącznie przez liniową kombinację ε_t oraz opóźnionych reszt ε_{t-k} , mówi się o czystym **procesie**

²⁸Nie jest tak jednak zawsze, ponieważ warunkowi tego nie spełniają np. modele klasy *ARCH-M*.

średniej ruchomej $MA(q)$ ²⁹ (*Moving Average process*). Najwyższy rząd opóźnienia występującego w kombinacji liniowej określa rząd modelu q . Rozpatrywany do tej pory model byłby w tym kontekście po prostu modelem $MA(0)$.

Proces $MA(q)$ może być zapisany w wersji skróconej jako:

$$r_t - \mu = \theta(L)\varepsilon_t, \quad (2.138)$$

gdzie:

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q. \quad (2.139)$$

Cechą tego modelu jest fakt, że jego funkcja autokorelacji przyjmuje wartości równe zero dla odstępów większych niż q .

Warto również zaznaczyć, że proces $MA(q)$ o skończonym rzędzie jest zawsze stacjonarny.

W przypadku, gdy wartość procesu w chwili t opisana jest wyłącznie przez odpowiednią liniową kombinację opóźnionych wartości procesu r_{t-k} mówi się o czystym **procesie autoregresji $AR(p)$** (*AutoRegressive process*). Także w tym przypadku rząd największego opóźnienia określa rząd modelu p .

Proces autoregresji rzędu p można zapisać w postaci skróconej jako:

$$\phi(L)(r_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad (2.140)$$

gdzie:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p. \quad (2.141)$$

Rozpatrywany do tej pory model (2.50) można więc również utożsamiać z procesem $AR(0)$. Z procesami $AR(p)$ wiąże się również pojęcie autokorelacji cząstkowej (por. Box, Jenkins (1986)). Teoretyczna funkcja autokorelacji cząstkowej procesu $AR(p)$ ma jedną ciekawą i podstawową własność, iż jest równa zero dla $k > p$, co umożliwia przynajmniej wstępne oszacowanie rzędu modelu.

Podstawowe wiadomości na temat własności modeli $MA(q)$ i $AR(p)$ znaleźć można w pracach Boxa i Jenkinsa (por. Box, Jenkins (1986)), Moixa (por. Moix (2001)) oraz Tsay'a (por. Tsay (2002)).

W wielu przypadkach analiza czystych modeli średniej ruchomej lub autoregresji wymaga korzystania z modeli wysokich rzędów. Osiągnięcie oszczędności w ilości

²⁹Przez ε_t oznacza się iloczyn $\sigma_t z_t$.

parametrów procesu możliwe jest poprzez odpowiednie włączenie do modelu zarówno autoregresji, jak i średniej ruchomej. Taką strukturę modelu określa się modelem autoregresji i średniej ruchomej oraz oznacza się $ARMA(p, q)$ (*AutoRegressive Moving Average process*). Dana jest ona wzorem:

$$\phi(L)(r_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t, \quad (2.142)$$

gdzie $\phi(L)$ i $\theta(L)$ dane są wzorami (2.141) i (2.139), a równania charakterystyczne $\phi(L) = 0$ i $\theta(L) = 0$ nie posiadają wspólnych pierwiastków. Analogicznie, jak dla czystych procesów autoregresji, proces $ARMA(p, q)$ jest procesem stacjonarnym, jeśli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $\phi(L) = 0$ leżą na płaszczyźnie liczb zespolonych poza okręgiem jednostkowym.

Przedstawienie wzoru na ogólną postać funkcji autokorelacji procesu $ARMA(p, q)$ jest skomplikowane. Najczęściej stosuje się jednak w praktyce model $ARMA(1, 1)$, dla którego własności autokorelacyjne są już proste do wyprowadzenia. Odpowiednie funkcje autokowariancji procesu $ARMA(1, 1)$ dane są następującymi wzorami:

$$\gamma(0) = \frac{(1 + 2\theta_1\phi_1 + \phi_1^2)\sigma^2}{1 - \theta_1^2}; \quad (2.143)$$

$$\gamma(1) = \frac{(1 + \theta_1\phi_1)(\theta_1 + \phi_1)}{1 - \theta_1^2}; \quad (2.144)$$

$$\gamma(k) = \theta_1\gamma(k - 1), \quad k \geq 2. \quad (2.145)$$

Nietrudno wykazać, że dla procesu $ARMA(1, 1)$, funkcja autokorelacji maleje wykładniczo jak dla przypadku $AR(1)$, jednak w ogólności $\rho(1) \neq \theta_1$.

Dla modelu $ARMA(1, 1)$ warunkowa wartość oczekiwana μ_t , będąca uogólnieniem stałego parametru μ dana jest zależnością:

$$\mu_t = \mu + \theta\varepsilon_{t-1} + \phi(r_{t-1} - \mu). \quad (2.146)$$

W zagadnieniach związanych z modelowaniem finansowych szeregów czasowych za pomocą procesów klasy $ARMA(p, q)$ ³⁰ rzadko kiedy stosuje się modele, dla których $p+q \geq 2$. Szczegółowe rozważania, co do funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla takich modeli znaleźć można w pracy Boxa i Jenkinsa (por. Box, Jenkins (1983)) lub w pracy zbiorowej pod red. Kulawczuka (por. Kulawczuk (1987)).

³⁰Przy założeniu, że modeluje się również zmienną w czasie wariancję procesu.

Podsumowując rozważania o procesach $AR(p)$, $MA(q)$ oraz $ARMA(p,q)$ można stwierdzić, iż w teorii:

- funkcja autokorelacji procesu średniej ruchomej rzędu q przyjmuje wartości równe zero dla odstępów większych niż q , podczas gdy funkcja autokorelacji cząstkowej łągodnie maleje (zanika),
- funkcja autokorelacji procesu autoregresji rzędu p maleje w sposób łągodny (zanika), natomiast funkcja autokorelacji cząstkowej przyjmuje wartości zerowe dla odstępów większych niż p ,
- jeżeli zarówno funkcja autokorelacji, jak i autokorelacji cząstkowej maleją stosunkowo szybko, można przypuszczać, że analizowany proces jest mieszanym procesem autoregresji i średniej ruchomej.

Wykorzystanie powyższych własności może być jednak znacznie utrudnione, wyestymowane autokorelacje mogą mieć duże wariancje i być silnie skorelowane. Z tego powodu trudne jest uzyskanie dokładnej zbieżności wyestymowanej funkcji z funkcją teoretyczną.

Dodatkowo należy zaznaczyć, iż częściej stosuje się modele $AR(p)$. Posługiwanie się modelami autoregresji jest intuicyjnie znacznie prostsze, gdyż wykorzystuje się zmienne obserwowalne (r_{t-k}), a nie jak w przypadku modeli średniej ruchomej i mieszanych - zmienne nieobserwowalne (ε_t). Fakt ten wpływa właśnie na znacznie częstsze wykorzystanie modeli klasy $AR(p)$, niż pozostałych.

2.8.2. Procesy zintegrowane ARIMA i ARFIMA

Do tej pory rozważane były jedynie procesy stacjonarne $ARMA(p,q)$, których pierwiastki równań charakterystycznych leżą poza okręgiem jednostkowym. W ogólnym przypadku nie zawsze tak być musi. Interesującą grupą modeli jest tzw. klasa $ARIMA(p,d,q)$ (AutoRegressive Integrated Moving Average), która umożliwia modelowanie niestacjonarności procesu. Model $ARIMA(p,d,q)$ charakteryzuje się tym, że d pierwiastków równania charakterystycznego związanego z częścią autoregresyjną leży na okręgu jednostkowym (na płaszczyźnie liczb zespolonych).

W sposób skrócony model taki zapisuje się w postaci:

$$\phi^*(L)(r_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t, \tag{2.147}$$

gdzie $\phi^*(L)$ jest niestacjonarnym operatorem autoregresji, w którym d pierwiastków ma wartość 1. Model *ARIMA* zapisuje się częściej jednak w postaci:

$$\phi(L)(1 - L)^d(r_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.148)$$

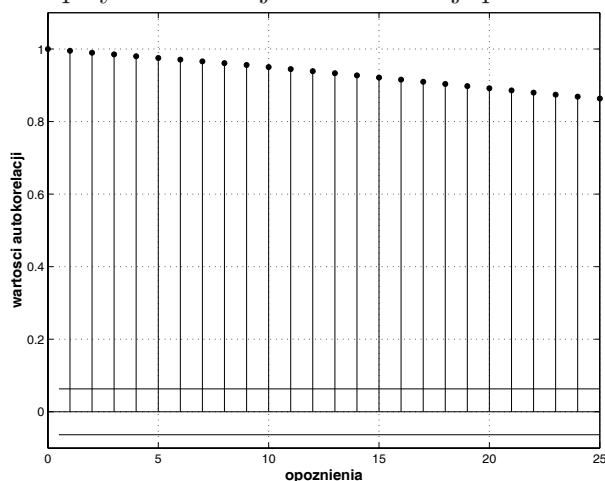
lub korzystając z operatora różnicowego:

$$\phi(L)\nabla^d(r_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2.149)$$

Jak łatwo zauważyć, w modelu tym zakłada się, że d -ta różnica procesu niestacjonarnego może być przedstawiona przez stacjonarny, proces *ARMA*. W zagadnieniach ekonomicznych rzadko kiedy rząd niestacjonarności jest większy niż jeden.

Więcej informacji na temat modeli *ARIMA* znaleźć można w pracy Boxa i Jenkinsa (por. Box, Jenkins (1983)). Wskazówką, że w strukturze modelu istnieje pierwiastek lub istnieją pierwiastki bliskie jedności, może być fakt, że funkcja autokorelacji procesu nie ma tendencji do szybkiego, wykładniczego zanikania, a charakteryzuje się wolnym, liniowym zanikaniem, przy czym nie jest konieczne, aby korelacja przy małych odstępach była duża. Funkcję autokorelacji dla procesu z pierwiastkiem jednostkowym przedstawia rysunek 2.19

Rysunek 2.19: Empiryczna funkcja autokorelacji procesu *ARIMA*(0,1,0)



Źródło: opracowanie własne.

Istnieje oczywiście również szereg testów statystycznych na obecność pierwiastka jednostkowego, na przykład test Dickey'a-Fullera (por. Taylor (1986), Tsay (2002)).

W wielu wypadkach niełatwą okazuje się również decyzja czy skorzystać z modelu *ARIMA*, czy *ARMA*. Nie istnieje gwałtowne przejście od zachowania się modelu w sposób stacjonarny do zachowania niestacjonarnego. Dla szeregów czasowych o

skończonej długości nie można bowiem nigdy w sposób jednoznaczny udowodnić, że pierwiastek operatora autoregresji jest dokładnie równy jedności. W przypadku wątpliwości należy wybrać raczej modele niestacjonarne niż stacjonarne.

Model *ARIMA* nie znajduje jednak zastosowania w modelowaniu szeregów stóp zwrotu. Można natomiast próbować znaleźć potencjalny obszar zastosowań do modelowania cen instrumentów.

Model ten został wprowadzony jednak z dwóch powodów:

- po pierwsze ułatwia on wprowadzenie jeszcze bardziej ogólnego modelu klasy *ARFIMA*(p, d, q), który znajduje już zastosowanie w modelowaniu stóp zwrotu,
- niektóre prezentowane w dalszej części pracy modele warunkowej zmienności (model *IGARCH*), po odpowiednim przekształceniu dają się zapisać w postaci procesu *ARIMA*.

Jak zostało przedstawione we wcześniejszej części rozdziału, funkcja autokorelacji szeregu *ARMA* zanika w sposób wykładniczy lub przyjmuje wartości równe zero, a dla procesu *ARIMA* z niezerowym współczynnikiem d maleje w sposób liniowy. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z krótkoterminową pamięcią procesu, a w drugim - z pamięcią praktycznie nieskończoną. Sytuację pośrednią, tzw. **długoterminową pamięć procesu** uzyskuje się, gdy funkcja autokorelacji zanika w sposób hiperboliczny.

Definicja 2.14.

Formalnie stacjonarny proces $\{r_t\}$ posiada własność długiej pamięci, gdy istnieje pewna stała dodatnia c_ρ oraz $d \in (0, \frac{1}{2})$, takie, że dla funkcji autokorelacji procesu zachodzi warunek:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{2d-1}} = 1. \quad (2.150)$$

Funkcja autokorelacyjna takiego procesu maleje dla dużych opóźnień w sposób hiperboliczny tak, że w przeciwieństwie do procesu *ARMA*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho(k)| = \infty. \quad (2.151)$$

Powoduje to skorelowanie szeregów obserwacji także dla dużych opóźnień.

Tak zdefiniowane własności posiada proces *ARFIMA*(p, d, q) wprowadzony przez Grangera i Joyeuxa (por. Granger, Joyeux (1980)).

Model ten zdefiniowany jest analogicznie jak proces *ARIMA*, lecz parametr d może przyjmować wartości z przedziału $(0, \frac{1}{2})$. Tłumaczy to nazwę **ułamkowy proces ARIMA**. Ułamkowy operator różnicowy ∇^d dla $d \in (0, \frac{1}{2})$ dany jest zależnością (por. Schmidt, Tschernig (1994)):

$$\nabla^d = (1 - L)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k - d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k + 1)(-1)^k} (-L)^k \quad (2.152)$$

Warto zaznaczyć, że funkcja autokorelacji dla ułamkowego ruchu Browna oraz procesu *ARFIMA* dla dużych odstępów zanika w taki sam sposób, a parametry modeli H i d łączy zależność:

$$d = H - \frac{1}{2}. \quad (2.153)$$

Metody identyfikacji modeli *ARFIMA* przedstawia na przykład praca Schmidta i Tscherniga (por. Schmidt i Tschernig (1994)), a techniki estymacji parametru d - praca Taqqu, Teverovsky'ego oraz Willingera (por. Taqqu, Teverovsky, Willinger (1995)) oraz w kontekście estymacji metodą funkcji największej wiarygodności np. praca Hausera (por. Hauser (1998)).

Tabela 2.3 prezentuje zestawienie podstawowych cech prezentowanych propozycji w zakresie modelowania efektu autokorelacji stóp zwrotu.

Podsumowując warto zauważyć, że w praktycznym zastosowaniu, ze względu na prostotę estymacji parametrów, a przede wszystkim formułowania prognoz, popularność zyskały modele autoregresji o rzędzie modelu mniejszym lub równym 3, modele *ARMA(1,1)* oraz (nadal jednak zdecydowanie najmniej popularne) najprostsze ułamkowe modele zintegrowane *ARFIMA(1,d,0)*. Jest to ponownie kompromis pomiędzy prostotą modelu i łatwością wykorzystania, a jakością dopasowania modelu do danych empirycznych.

Tabela 2.3: Zestawienie cech modeli warunkowej wartości oczekiwanej

Model	Własności teoretycznej funkcji autokorelacji
MA(q)	funkcja autokorelacji przyjmuje wartości zerowe dla opóźnień większych niż rząd modelu q , prowadzi to bardzo krótkiej (równiej rzędowi modelu) pamięci procesu
AR(p)	funkcja korelacji stacjonarnego procesu maleje co do wartości bezwzględnej w sposób wykładniczy, składa się ona z zanikających funkcji wykładniczych, za które odpowiedzialne są rzeczywiste pierwiastki równania charakterystycznego procesu oraz z tłumionych sinusoid, za które odpowiedzialne są sprzężone (zespolone) pary pierwiastków, prowadzi to do krótkiej pamięci procesu
ARMA(p,q)	funkcja autokorelacji po pierwszych $(q - p)$ odstępach składa się z funkcji wykładniczych i tłumionych wykładniczo sinusoid, analogicznie jak dla modelu AR(p), prowadzi to także do efektu krótkiej pamięci procesu
ARFIMA(p,d,q)	funkcja autokorelacji maleje co do wartości bezwzględnych w sposób hiperboliczny wraz ze wzrostem opóźnień, umożliwia to opis długiej pamięci procesu
ARIMA(p,d,q)	funkcja autokorelacji maleje co do wartości bezwzględnych w sposób bardzo wolny i prawie liniowy, co prowadzi do praktycznie nieskończonej pamięci procesu

Źródło: opracowanie własne.

2.9. Uogólnienia w zakresie σ

Zgodnie z tym, co zostało już zasygnalizowane wcześniej, zagadnienia związane z modelowaniem szeregów stóp zwrotu r_t , podzielić można na 3 obszary:

- wybór postaci funkcji gęstości standaryzowanych reszt modelu,
- modelowanie warunkowej wartości oczekiwanej procesu (μ_t),
- modelowanie warunkowej wariancji procesu (σ_t).

Wszystkie trzy zagadnienia należy rozpatrywać łącznie, gdyż wzajemnie wpływają na siebie i wspólnie determinują własności modelu ostatecznego.

Do tej pory przedstawione zostały zagadnienia związane z dwoma pierwszymi obszarami. Umożliwiają one opis takich zaobserwowanych własności szeregów stóp zwrotu, jak grube ogony rozkładów, skośność rozkładów, czy autokorelacja i długa pamięć procesów. Nie umożliwiają one jednak opisu najciekawszej chyba własności, a mianowicie zmiennej w czasie wariancji procesu. Do omówienia pozostało więc zagadnienie związane z modelowaniem parametru σ_t .

Warto przypomnieć, iż jedynie w przypadku stałego parametru μ , parametr σ jest bezwarunkowym odchyleniem standardowym stóp zwrotu. W każdym innym przypadku, gdy zmianie podlega parametr μ , σ , czy obydwaj parametry naraz, to wariancja bezwarunkowego rozkładu nie jest już opisana wprost parametrem σ^2 .

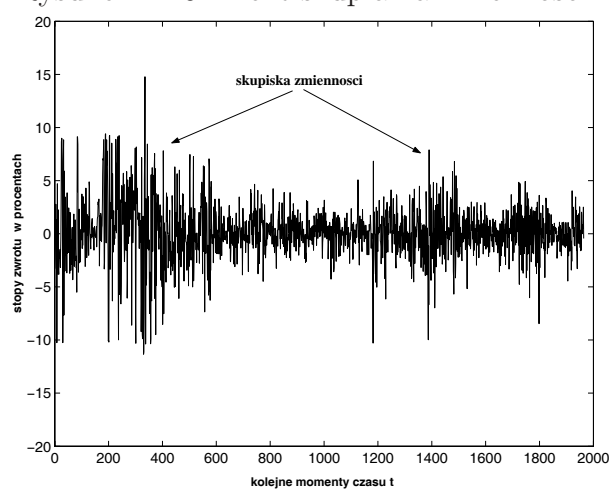
Już pobieżna obserwacja wykresu szeregu stóp zwrotu z dowolnego instrumentu finansowego pozwala zaobserwować sygnalizowany wcześniej efekt „skupiania zmienności”, co przejawia się tym że po dużych (co do wartości bezwzględnych) stopach zwrotu pojawiają się kolejne duże (co do wartości bezwzględnej) stopy zwrotu, a następnie nagle obserwuje się małe (co do wartości bezwzględnej) stopy zwrotu, po których ponownie występują małe (co do wartości bezwzględnej) stopy zwrotu itd. Najprościej można określić to stwierdzeniem, że zarówno małe, jak i duże zmiany kursów następują seriami, czyli obserwujemy naprzemiennie okresy o większej i mniejszej zmienności stóp zwrotu. Niemniej na tle skupiania zmienności występuje także zjawisko powrotu do długoterminowej średniej. Dodatkowo obserwuje się efekt autokorelacji pomiędzy kwadratami stóp zwrotu lub wartościami bezwzględnymi stóp zwrotu. Zależności te mogą wiązać ze sobą obserwacje na tyle odległe, iż zasadna staje się konieczność rozpatrywania modeli o długiej pamięci w odniesieniu do szeregów zmienności. Ostatnią, obserwowaną własnością, która stanie się również przedmiotem dalszych rozważań jest obserwowany w niektórych szeregach stóp zwrotu (szczególnie akcji i indeksów akcji) „efekt dźwigni”, czyli ujemnej korelacji pomiędzy poziomem

kursu, a wartością zmienności.

Modelowaniu wyżej wymienionych własności szeregów stóp zwrotu poświęcony zostanie niniejszy podrozdział.

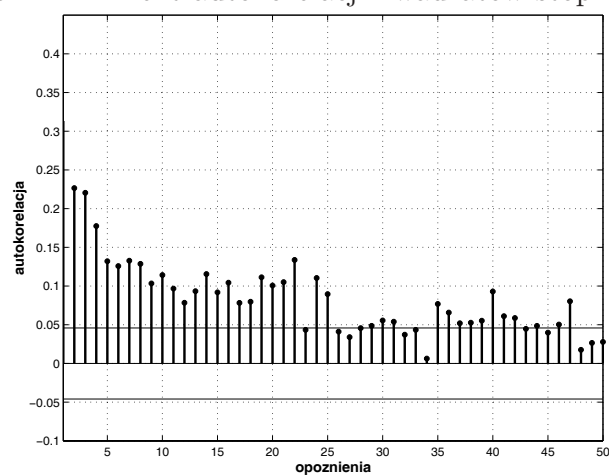
Rysunki 2.20 i 2.21 prezentują efekt skupiania zmienności oraz autokorelacji kwadratów stóp zwrotu dla szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG z okresu od października 1994 roku do maja 2002 roku.

Rysunek 2.20: Efekt skupiania zmienności.



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.21: Efekt autokorelacji kwadratów stóp zwrotu.



Źródło: opracowanie własne.

Prezentowane w dalszej części pracy rozwiązania możemy ogólnie podzielić na modele:

- z czasem ciągłym, które korespondują z opisanymi wcześniej modelami zmian cen dla czasu ciągłego (por. str. 58),
- z czasem dyskretnym, które stanowią rozszerzenie modeli dynamiki cen lub stóp zwrotu w czasie dyskretnym.

Przedmiotem zainteresowania tej pracy pozostają przede wszystkim modele z czasem dyskretnym. Niemniej jednak zaprezentowane zostaną również podstawowe informacje o modelach z czasem ciągłym. Warto jednak zaznaczyć, iż szereg modeli z czasem dyskretnym, ale nie wszystkie, prowadzi w granicy do otrzymania typowych, pojawiających się w literaturze przedmiotu modeli z czasem ciągłym. Rozkwit modeli z czasem ciągłym związany był przede wszystkim z chęcią budowy coraz doskonalszych, coraz lepiej przybliżających rzeczywistość modeli zmian cen instrumentów bazowych, mogących posłużyć do konstrukcji coraz lepszych modeli wyceny opcji. Problemy jednak z estymacją parametrów modeli zmienności z czasem ciągłym (por. Wilmott (1999)) oraz fakt, iż w 1995 roku Duan zaprezentował stosunkowo proste podejście do wyceny opcji poprzez model czasu dyskretnego uwzględniający najważniejsze własności szeregów stóp zwrotu instrumentu bazowego (takich jak zmienna w czasie wariancja i autokorelacja stóp zwrotu) (por. Duan (1995), Hafner i Herwarz (1999), Schmitt (1996)) spowodowało relatywny spadek zainteresowania modelami z czasem ciągłym i konsekwentny wzrost popularności zdecydowanie łatwiejszych w aplikacji oraz w intuicyjnym zrozumieniu modeli z czasem dyskretnym. Z tego też powodu główny nacisk położony zostanie na modele z czasem dyskretnym.

2.9.1. Modele z czasem ciągłym

Modele zmienności z czasem ciągłym swoją popularność zawdzięczają przede wszystkim modelom wyceny opcji, które pozostają w lepszej zgodności z obserwowanymi cenami rzeczywistymi niż model Blacka-Scholesa (ze stałym parametrem zmienności). Konieczność takich poszukiwań zapoczątkowało udokumentowanie występujących obciążeń modelu Blacka-Scholesa polegających na nieprawidłowej wycenie opcji, które nie są *at-the-money* (efekt ten nazwano „*uśmiechem zmienności*”) oraz opcji o różnym terminie wykupu (efekt „*struktury czasowej zmienności implikowanej*”) ³¹.

Model zmiany cen ³² dla czasu ciągłego, uwzględniający również zmienną w czasie

³¹Więcej na ten temat zaprezentowane zostanie w rozdziale 3, w podrozdziale o prognozowaniu zmienności na podstawie zmienności implikowanej.

zmiennosc zapisać można w postaci dwóch procesów dyfuzji, z których drugi opisuje osobno zmiany parametru zmienności (por. Wilmott (1999)):

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma(t)X(t)dB_1(t), \quad (2.154)$$

$$dy(t) = p(X, t)dt + q(X, t)dB_1(t). \quad (2.155)$$

Nietrudno zauważyć, że model ten jest uogólnieniem geometrycznego ruchu Browna. Oczywiście w analogiczny sposób można rozszerzyć każdy z modeli prezentowanych na stronie 2.1. Model geometrycznego ruchu Browna stał się jednak obiektem szczególnego zainteresowania ze względu na aplikację metodologii martyngałów (por. Wilmott (1999)).

Parametr $y(t)$ z równania (2.155) jest funkcjonałem procesu zmienności ($\sigma(t)$) wyrażonej jako proces z czasem ciągłym. Najczęściej rozpatruje się trzy przypadki, gdy:

$$y(t) = \begin{cases} \sigma(t) \\ \sigma(t)^2 \\ \ln(\sigma(t)) \end{cases} . \quad (2.156)$$

Zakładając, że procesy $X(t)$ i $y(t)$ są odwracalne, wzór (2.155) można zapisać w postaci (por. Wilmott (1999)):

$$dy(t) = p'(y, t)dt + q'(y, t)dB_1(t), \quad (2.157)$$

co prowadzi do osobnego równania opisującego zmiany zmienności procesu.

Początkowe założenie o tym, że w obydwu równaniach występuje to samo źródło losowości (różniczka tego samego procesu Browna) zostało osłabione poprzez wprowadzenie drugiego źródła losowości (skorelowanego bądź nie z pierwszym) i ostatecznie najczęściej rozpatruje się następujący model:

$$dX(t) = \mu Xdt + \sigma(t)XdB_1(t), \quad (2.158)$$

$$dy(t) = p'(y, t)dt + q'(y, t)dB_2(t), \quad (2.159)$$

$$dB_1(t)dB_2(t) = \rho dt, \quad (2.160)$$

³²Można właściwie mówić wprost o modelu dynamiki stóp zwrotu, ze względu na przyjęcie założenia, że proces cen jest geometrycznym ruchem Browna.

gdzie ρ to współczynnik korelacji pomiędzy przyrostami procesów $B_1(t)$ i $B_2(t)$. Przyjęcie ujemnej korelacji pozwala na modelowanie „efektu dźwigni”, czyli ujemnej korelacji pomiędzy poziomem ceny i zmienności.

Najczęściej rozpatruje się następujące procesy zmienności z czasem ciągłym znajdujące zastosowanie w modelach wyceny opcji (por. np. Musiela, Rutkowski (1998), Hobson (1996))³³:

- $d\sigma_t^2 = \kappa(\nu - \sigma_t^2)dt + \theta\sigma_t^2dB_2$ (Hull i White (1987)),
- $d\sigma_t^2 = \kappa(\nu - \sigma_t^2)dt + \theta\sigma_tdB_2$ (Heston (1993)),
- $d\sigma_t^2 = \kappa(\nu - \sigma_t^2)dt + \theta dB_2$ (Stein i Stein (1991)),
- $d\sigma_t = \kappa\sigma_t dt + \theta\sigma_t dB_2$ (Wiggins (1987)),
- $d\sigma_t = \kappa\sigma_t(\nu - \sigma_t)dt + \theta\sigma_t dB_2$ (Scott (1987)),
- $d\sigma_t = \sigma_t^{-1}(\nu - \kappa\sigma_t^2)dt + \theta dB_2$ (Hull i White (1987), Heston (1993)),
- $d\sigma_t = \kappa(\nu - \sigma_t)dt + \theta dB_2$ (Stein i Stein (1991)).

W modelach tych łatwo dostrzec, iż różnią się w części deterministycznej występowaniem lub nie, efektu powrotu do długoterminowej średniej (bądź to w zakresie powrotu σ_t lub σ_t^2) oraz odmiennym uwzględnieniem w części stochastycznej wpływu poziomu procesu.

Modele te znalazły jednak zastosowanie praktycznie jedynie w odniesieniu do wyceny opcji, a ich znaczenie nawet w tym obszarze relatywnie spada, dlatego w dalszej części pracy rozpatrywane będą jedynie modele z czasem dyskretnym.

2.9.2. Modele zmienności deterministycznej

Jak już zostało zasygnalizowane, modele z czasem dyskretnym możemy podzielić na:

³³Obok modeli podano przykładowe nazwiska osób, które zastosowały dany model w wycenie opcji. Odpowiednie cytowania znaleźć można w pracy Rutkowskiego i Musiela (por. Musiela, Rutkowski (1998)).

- modele deterministyczne, w których zakłada się, że możliwe jest jednoznaczne oszacowanie warunkowego parametru zmienności na kolejny podokres na podstawie informacji z przeszłości i terażniejszości. W modelach tych występuje to samo źródło losowości zarówno w równaniu opisującym zmianę ceny (lub stopy zwrotu), co w równaniu opisującym zmianę wariancji. Zagadnienie to zaprezentowane zostanie szczegółowo w dalszej części podrozdziału.
- modele stochastyczne, w których zakłada się, że przyszły warunkowy poziom zmienności nie może być dokładnie oszacowany na podstawie danych z przeszłości i terażniejszości. W modelach tych występuje bowiem drugie źródło losowości w równaniu warunkowej zmienności, które może być dowolnie skorelowane ze źródłem losowości występującym w równaniu opisującym zmiany cen (stóp zwrotu) (por. rozdz. 2.9.3.).

Ze względu na stosunkową łatwość estymacji parametrów oraz formułowania prognoz, modele deterministyczne wielokrotnie przewyższają swoją popularnością modele stochastyczne. **Główny nacisk w pracy położony zostanie więc na zaprezentowanie modeli deterministycznych.** Rozważania zakończy jednak prezentacja najpopularniejszego modelu zmienności stochastycznej.

Dodatkowo warto zaznaczyć, iż rozpatrywane będą jedynie modele jednorównaniowe (opisujące jedynie zmiany stóp zwrotu pojedynczych instrumentów). Modele wielorównaniowe ze względu na poziom skomplikowania są do chwili obecnej nader rzadko wykorzystywane.

Dalsza część rozdziału poświęcona zostanie prezentacji najpopularniejszych modeli dla czasu dyskretnego wywodzących się z zapoczątkowanej w 1982 roku przez Engla klasy modeli heteroskedastycznych - modeli *ARCH*.

Jest to bogata klasa modeli deterministycznych umożliwiających opis takich własności finansowych szeregów czasowych, jak:

- zmienna w czasie wariancja, skupianie zmienności, a co za tym idzie grube ogony rozkładów bezwarunkowych,
- „efekt dźwigni”, czyli ujemna korelacja pomiędzy poziomami cen a poziomami wariancji (obserwowalny przede wszystkim dla akcji i indeksów),
- krótko- lub długoterminowa zależność pomiędzy kwadratami stóp zwrotu (autokorelacja szeregów kwadratów stóp zwrotu).

Dalsze części podrozdziału poświęcone zostaną kolejnym uogólnieniom najprostszego modelu heteroskedastycznego, które umożliwią będą modelowanie powyższych własności. Analizę rozpoczną modele umożliwiające jedynie opis skupiania wariancji, następnie uogólnione one zostaną na modele pozwalające uwzględniać „efekt dźwigni”. Rozważania zakończą przykładowe modele opisujące długoterminową zależność w szeregach zmienności. Oczywiście modele te mogą występować w różnych konfiguracjach. Wszystkie one umożliwiają jednak modelowanie skupiania wariancji, niektóre dodatkowo efektu długoterminowej pamięci, niektóre „efektu dźwigni”, a niektóre wszystkich tych własności naraz.

Na koniec przedstawione zostaną podstawowe informacje o metodach testowania modelowanego efektu skupiania danych oraz estymacji parametrów modeli.

Niniejsza praca w żaden sposób nie pretenduje do opisanego całego bogactwa klasy modeli, których historię zapoczątkował prosty model *ARCH*. Zaprezentowane zostaną jedynie najpopularniejsze modele jednorównaniowe. Jak zapewniają sami autorzy dwóch głównych modeli Engle i Bollerslev, bogactwo modeli prezentowanej klasy jest jednocześnie błogosławieństwem i przekleństwem. Znaczna liczba możliwych do wyboru rozwiązań, a także „elastyczność” modeli klasy *ARCH* pozwala wierzyć, że wśród tych wszystkich modeli istnieje postać przydatna w analizach, wystarczy ją tylko znaleźć.

Zagadnienie modelowania zmienności za pomocą modeli klasy *ARCH* doczekało się szeregu prac przeglądowych i podsumowujących. Do najważniejszych można zaliczyć prace Bollersleva, Chou i Kronera (Bollerslev, Chou, Kroner (1992)), Bollersleva, Engla i Nelsona (por. Bollerslev, Engle, Nelson (1994)), Bera i Higginsa (por. Bera i Higgins (1995)), Diebolda i Lopeza (por. Diebold, Lopez (1995)), Gouriéroux (por. Gouriéroux (1997)), Knighta i Satchella (por. Knight, Satchell (1998)), czy Jarrowa (por. Jarrow (1998)).

W pracach tych można znaleźć zarówno rozwiązania w zakresie postaci modeli, testowania hipotez, estymacji parametrów, jak i ogromny zbiór odwołań literaturowych.

Nadal za punkt wyjścia służy model:

$$r_t = \mu_t + \sigma_t z_t. \quad (2.161)$$

W dalszej części rozdziału przyjmuje się, iż parametr μ_t jest stały w czasie.

Modelowanie skupiania zmienności

Model ARCH(q)

Pierwszym modelem uwzględniającym zależność warunkowej wariancji procesu od jego poprzednich wartości (co umożliwia opis skupiania wariancji oraz autokorelacji kwadratów stóp zwrotu) był model *ARCH* (*Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model*) wprowadzony w 1982 roku przez Engla w celu modelowania poziomu inflacji w Wielkiej Brytanii (por. Engle (1982)).

Model stóp zwrotu uwzględniający efekt *ARCH(q)* dany jest następującymi zależnościami³⁴:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t = \mu + \sqrt{h_t}z_t, \quad (2.162)$$

gdzie:

$$z_t \sim iid(0, 1), \quad (2.163)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad (2.164)$$

$\omega \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q - 1$), $\alpha_q > 0$ oraz:

μ - to wartość oczekiwana stopy zwrotu (stała),

h_t - warunkowa wariancja procesu w chwili t .

Najczęściej przyjmuje się, iż z_t ma rozkład normalny, jednak badania empiryczne wykazały, konieczność stosowania warunkowych rozkładów o grubszych ogonach (por. Bollerslev, Engle, Nelson (1994)) oraz w niektórych przypadkach - skośnych (por. Lambert, Laurent (2001)). **W dalszych rozważaniach przyjmuje się więc że z_t jest jednym z prezentowanych w wcześniej rozkładów o jednostkowej wariancji i zerowej średniej (rozkład normalny, rozkład GED, rozkład hiperboliczny, symetryczny lub skośny rozkład t-Studenta).**

Resztę modelu ε_t możemy utożsamiać z łączną miarą informacji docierającą w chwili t . Dobre wiadomości ($\varepsilon_t > 0$) skutkują potencjalnie wzrostem cen³⁵ (dodatnia wartość stopy zwrotu), natomiast złe wiadomości ($\varepsilon_t < 0$), to potencjalny spadek ceny (ujemna stopa zwrotu) w kolejnym okresie. Wartość $|\varepsilon_t|$ określa wagę informacji (por. Engle, Ng (1993)).

³⁴Z powodów zwyczajowych warunkowa wariancja oznaczana będzie przez h_t a nie σ_t^2 .

³⁵Oczywiście należy uwzględnić również wpływ parametru μ .

Wzór (2.162) można zapisać również w postaci:

$$r_t | I_{t-1} \sim iid(\mu, h_t), \quad (2.165)$$

gdzie I_{t-1} to informacja dostępna w chwili $(t-1)$.

Jest to definicja tzw. **silnego procesu ARCH** (por. Bollerslev, Chou, Kroner (1992)) i tylko takie procesy pozostaną w obszarze zainteresowań niniejszej pracy.

Model $ARCH(q)$ można zapisać także przy pomocy operatorów przesunięcia:

$$h_t = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t, \quad (2.166)$$

gdzie:

$$\alpha(L) \equiv \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \alpha_3 L^3 + \dots + \alpha_q L^q. \quad (2.167)$$

Bezwarunkowa wariancja procesu³⁶ (średnia wariancja stóp zwrotu) wynosi:

$$V_{ARCH} = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}, \quad (2.168)$$

a warunkiem jej istnienia jest spełnienie nierówności:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1. \quad (2.169)$$

Model jest wtedy stacjonarny w szerszym sensie (por. Bollerslev, Chou, Kroner (1992)).

Nietrudno wykazać, że w przypadku najprostszego modelu $ARCH(1)$, kurtoza ε_t , wyznaczająca również kurtozę r_t dana jest wzorem (por. Moix (2000)):

$$\text{kurt}[\varepsilon_t] = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{E[\varepsilon_t^2]^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2}, \quad (2.170)$$

co oznacza, iż gdy $\alpha_1 < \frac{\sqrt{3}}{3}$, uzyskujemy kurtozę bezwarunkowego rozkładu stóp zwrotu większą od 3, czyli przyjęcie modelu zmiennej w czasie warunkowej wariancji umożliwi również modelowanie grubych ogonów rozkładów.

W przypadku próby stosowania modeli $ARCH$, napotyka się na problem wyboru rzędu modelu:

- wybór niskiego rzędu modelu może skutkować utratą informacji o wpływie reszt dla dużych opóźnień, co może powodować nie wystarczające dopasowanie modelu do danych,

³⁶Przy założeniu, iż $\mu_t = \mu = const.$

- wybór wysokiego rzędu modelu zapewnia natomiast co prawda dobre dopasowanie modelu do danych, lecz wiąże się z możliwymi problemami z estymacją dużej liczby parametrów w przypadku zbyt małej liczby obserwacji (duży błąd oszacowań).

Engle zaproponował postać modelu (wykorzystującą subiektywnie przyjęty zestaw wag), pozwalającą znacznie ograniczyć liczbę niezbędnych do wyestymowania parametrów modelu (por. Bollerslev, Chou, Kroner (1992)):

$$h_t = \omega + \alpha \sum_{i=1}^q w_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (2.171)$$

gdzie:

$$w_i = \frac{2(q+1-i)}{q(q+1)}. \quad (2.172)$$

Modelem umożliwiającym uniknięcie konieczności szacowania dużej liczby parametrów okazał się jednak model $GARCH(p, q)$.

Model $GARCH(p, q)$

Model $GARCH$ (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Model*) jest uogólnieniem modelu $ARCH$ zaproponowanym w 1986 roku przez Bollersleva. Model ten uzyskuje się poprzez uzależnienie warunkowej wariancji w chwili t nie tylko od przeszłych reszt modelu ε_t , ale także od przeszłych wartości warunkowej wariancji h_t (por. Bollerslev (1986)).

Model $GARCH$ definiuje następujące równanie warunkowej wariancji:

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} \quad (2.173)$$

lub

$$h_t = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_t, \quad (2.174)$$

gdzie:

$$\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \beta_3 L^3 + \dots + \beta_p L^p \quad (2.175)$$

Zwykle przyjmuje się, że $\omega \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, q-1$), $\alpha_q > 0$, $\beta_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, p-1$), $\beta_p > 0$. Nelson i Cao przedstawili bardziej szczegółowe warunki, przy których równanie (2.173) jest określone i warunkowa wariancja pozostaje dodatnia.

Bezwarunkowa wariancja procesu³⁷ (średnia wariancja stóp zwrotu) dana jest wzorem:

$$V_{GARCH} = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i - \sum_{j=1}^p \beta_j}, \quad (2.176)$$

a warunkiem jej istnienia jest spełnienie nierówności:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \quad (2.177)$$

Model jest wtedy stacjonarny w szerszym sensie.

Badania empiryczne wykazują, że model $GARCH(p, q)$ znacznie lepiej dopasowuje się do danych empirycznych niż model $ARCH(q)$. Nie jest to zaskoczeniem, można bowiem wykazać, iż model $GARCH(p, q)$ można wyrazić jako model $ARCH(\infty)$:

$$h_t = \omega[1 - \beta(1)]^{-1} + \alpha(L)[1 - \beta(L)]^{-1} \varepsilon_t^2 \quad (2.178)$$

$$= \omega \left(1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-1}^2 \quad (2.179)$$

gdzie:

$$\delta_i = \begin{cases} \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j}, & i = 1, \dots, q \\ \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j}, & i = q + 1, q + 2, \dots \end{cases}, \quad (2.180)$$

gdzie $n = \min(p, i - 1)$.

Na przykład stosunkowo prosty model $GARCH(1, 2)$ jest modelem $ARCH(\infty)$ o następującej postaci:

$$h_t = \frac{\omega}{1 - \beta} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2) \sum_{j=0}^{\infty} \beta_1^j \varepsilon_{t-j-2}^2. \quad (2.181)$$

Ciekawą i czasami przydatną własnością modelu $GARCH(p, q)$ jest także fakt, iż model taki można wyrazić również poprzez model $ARMA(m, p)$, $m = \max(p, q)$:

$$\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t = h_t(z_t^2 - 1), \quad (2.182)$$

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t. \quad (2.183)$$

³⁷Przy założeniu, iż $\mu_t = \mu = const$.

Najpopularniejszym modelem klasy *GARCH* jest model *GARCH(1,1)*:

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}. \quad (2.184)$$

Wiele prac empirycznych wykazało, że model ten bywa wystarczający w przypadku wielu zastosowań i nie ma potrzeby stosowania modeli wyższych rzędów. Bardzo rzadko wykorzystuje się więc modele *GARCH*, dla których $p+q \geq 3$.

Bezwarunkowa wariancja modelu *GARCH(1,1)* dana jest wzorem:

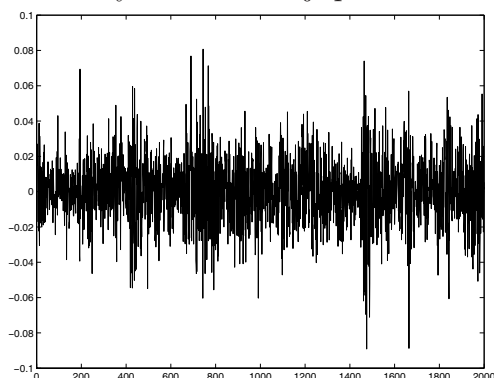
$$V_{GARCH} = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (2.185)$$

natomiast kurtoza:

$$\text{kurt}[\varepsilon_t] = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2}. \quad (2.186)$$

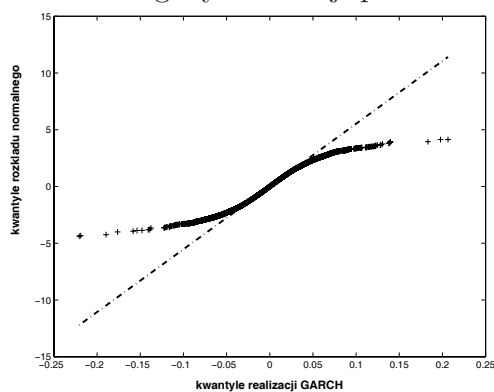
Poniższe rysunki prezentują dla przykładowej realizacji procesu *GARCH(1,1)* umiejętność modelowania efektu skupiania zmienności, grubych ogonów rozkładu, skorelowania kwadratów stóp zwrotu. Można zauważyć, iż autokorelacja szeregu kwadratów stóp zwrotu nie jest związana z autokorelacją szeregu stóp zwrotu, co oznacza konieczność osobnego modelowania warunkowej wartości oczekiwanej.

Rysunek 2.22: Przykład realizacji procesu *GARCH(1,1)*



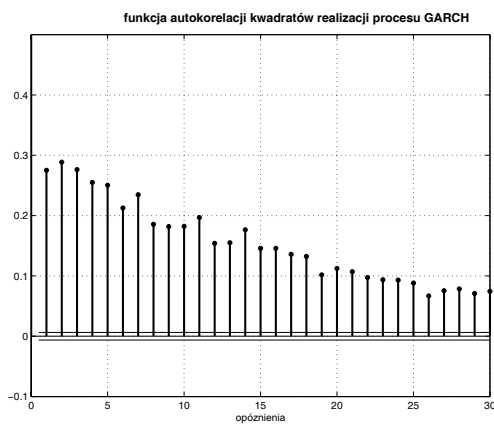
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.23: Grube ogony realizacji procesu $GARCH(1,1)$



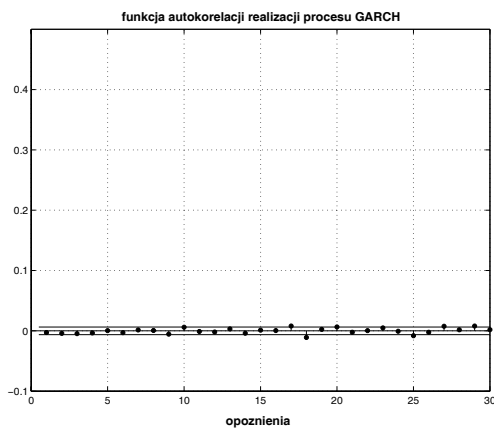
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.24: Autokorelacje kwadratów stóp zwrotu realizacji procesu $GARCH(1,1)$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2.25: Efekt braku autokorelacji stóp zwrotu realizacji procesu $GARCH(1,1)$



Źródło: opracowanie własne.

W modelu $GARCH(1,1)$ parametr α_1 mierzy wpływ zaburzenia (nowej informacji) na warunkową wariancję w przyszłym okresie, a $(\alpha_1 + \beta_1)$ odpowiada za szybkość zanikania wpływu informacji z chwili t na warunkowe wariancje w kolejnych chwilach czasu.

W badaniach empirycznych, szczególnie dla szeregów dziennych stóp zwrotu, wyrażenie $(\alpha_1 + \beta_1)$ jest często bliskie jedności. Gdy $(\alpha_1 + \beta_1) \rightarrow 1$, model $GARCH$ dąży do modelu $IGARCH$, w którym informacja z dowolnie odległej przeszłości jest istotna w wyjaśnieniu obecnej zmienności. W takim przypadku nie istnieje również bezwarunkowa wariancja procesu (jest ona nieskończona).

Model $IGARCH$ omówiony zostanie w dalszej części podrozdziału wraz z innymi modelami umożliwiającymi opis długoterminowych zależności w szeregach zmienności.

Jak już zostało nadmienione parametr α_1 mierzy wpływ informacji z chwili $(t-1)$, czyli wpływ reszty modelu ε_{t-1} na zmianę warunkowej wariancji w chwili t . Warunkowa wariancja w chwili t zależy od informacji w chwili $(t-1)$ poprzez zależność:

$$h_t = f(\varepsilon_{t-1}) = A + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad (2.187)$$

gdzie:

$$A = \omega + \beta_1 h_{t-1}. \quad (2.188)$$

Funkcja $f(\varepsilon_{t-1})$ jest wygodnym narzędziem umożliwiającym opis własności modeli klasy $ARCH$. Metoda ta wprowadzona została przez Pagana i Schwerta (por. Pagan, Schwert (1990)), a następnie spopularyzowana w 1993 przez Engla i Ng pod nazwą **krzywej wpływu informacji** (*News Impact Curve*) (por. Engle, Ng (1993)).

Zarówno dla modeli $ARCH$, jak i $GARCH$ krzywa ta opisywana jest przez funkcję symetryczną względem osi $\varepsilon_t = 0$ o kształcie paraboli.

Kolejne uogólnienia modelu $GARCH$ w zakresie modelowania jedynie skupiania wariancji, sprowadzają się do odmiennego zdefiniowania funkcji $f(\varepsilon_t)$, która nadal jednak jest symetryczna względem $\varepsilon_t = 0$.

Najprostszym modelem z tego zakresu jest model rozważany przez Taylora (por. Taylor (1986)) oraz Schwerta (por. Schwert (1989)) o postaci:

$$\sqrt{h_t} = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^p \sqrt{h_{t-j}}, \quad (2.189)$$

w którym modelowaniu podlega warunkowe odchylenie standardowe stóp zwrotu, a nowa informacja ujmowana jest w modelu poprzez funkcje wartości bezwzględnej.

Klasyczny model *GARCH* oraz model (2.189) zawierają się w modelu *NARCH*(p, q) (*Nonlinear ARCH*) (por. Higgins, Bera (1992)) o postaci:

$$h_t^{\frac{\gamma}{2}} = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |\varepsilon_{t-i}|^{\gamma} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^{\frac{\gamma}{2}}. \quad (2.190)$$

Model *NARCH* umożliwia modelowanie zarówno warunkowej wariancji, jak i warunkowego odchylenia standardowego oraz wszystkich rozwiązań pośrednich.

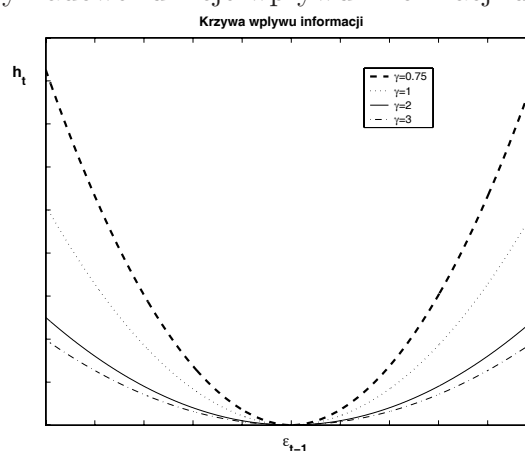
Model ten charakteryzuje się następującą funkcją wpływu informacji:

$$h_t(\varepsilon_{t-1}) = (A + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}|^{\gamma})^{\frac{2}{\gamma}}, \quad (2.191)$$

gdzie A - to stała zależna od rzędu modelu.

Na rysunku 2.26. zaprezentowane zostały przykładowe funkcje wpływu informacji możliwe do uzyskania w powyższym modelu. W modelu *NARCH*(p, q) niezbędna jest oczywiście także estymacja parametru γ .

Rysunek 2.26: Przykładowe funkcje wpływu informacji dla modelu *NARCH*



Źródło: opracowanie własne.

Jak widać modele te nie umożliwiają opisu efektu dźwigni, gdyż informacja dobra i zła tak samo wpływają na warunkową wariancję w kolejnym okresie. W zależności od wyboru parametru γ obserwuje się różną siłę wpływu nowych informacji na wartość warunkowej wariancji.

Modelowanie „efektu dźwigni”

Ujemna autokorelacja pomiędzy poziomem cen, a warunkową wariancją udokumentowana została w szeregu prac (por. Black (1976), Christie (1982), Nelson (1991),

Glosten, Jagannathan, Runkle (1993)) szczególnie w odniesieniu do szeregów stóp zwrotu z akcji i indeksów. Efekt ten nazywa się „efektem dźwigni”, gdyż spadek ceny akcji zwiększa dźwignię finansową, powodując wzrost ryzyka związanego z inwestycją w akcję tej spółki, co w konsekwencji prowadzi do wzrostu zmienności. Schwert wykazał jednak, iż obserwowany efekt jest zbyt silny, by można go było wytłumaczyć jedynie zjawiskiem wzrostu dźwigni (por. Schwert (1989)). Jako drugie potencjalne wytłumaczenie podaje się zazwyczaj istnienie zmiennej w czasie premii za ryzyko (por. Campbell, Hentschel (1992)).

Efekt dźwigni w modelach z czasem ciągłym i w modelach stochastycznych (por. rozdz. 2.9.1. i 2.9.3.) opisuje się poprzez wprowadzenie odpowiedniej (ujemnej) korelacji pomiędzy źródłami losowości w równaniu opisującym zmiany ceny i w równaniu wariancji.

W modelach deterministycznych efekt ten uzyskuje się poprzez odpowiednią modyfikację kształtu lub położenia funkcji wpływu informacji na warunkową wariancję.

Warto zaznaczyć, iż asymetria w strukturze zmienności generuje także skośność rozkładu stóp zwrotu.

Istnieje wiele uogólnień modelu *GARCH*, które pozwalają uwzględnić asymetryczny wpływ dobrych i złych wiadomości, czyli dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na warunkową wariancję w kolejnym okresie (por. Bollerslev, Engle, Nelson (1994)). Poniżej zaprezentowane zostaną najpopularniejsze propozycje.

Także w tym przypadku, rozróżnienia własności modeli najprościej dokonać poprzez analizę funkcji wpływu informacji.

Efekt asymetrycznego wpływu informacji można uzyskać poprzez:

- przesunięcie symetrycznej krzywej wpływu informacji tak, by minimum funkcji nie wypadało dla $\varepsilon_t = 0$,
- zagwarantowanie minimum funkcji $f(\varepsilon_{t-1})$ dla $\varepsilon_{t-1} = 0$, ale wprowadzenie asymetrii w nachyleniu obu ramion krzywej,
- poprzez łączne wprowadzenie powyższych rozwiązań.

Modele z przesunięciem krzywej

Przykładowym modelem z przesunięciem symetrycznej krzywej wpływu informacji jest model *QARCH(p,q)* (*Quadratic ARCH*) będący naturalnym rozszerzeniem

modelu $NARCH(p, q)$:

$$h_t^{\frac{\gamma}{2}} = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |\varepsilon_{t-i} - \kappa|^{\gamma} + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^{\frac{\gamma}{2}}. \quad (2.192)$$

Przyjęcie w modelu $\kappa > 0$ powoduje przesunięcie krzywej wpływu informacji w prawo, co pozwala uchwycić silniejszy wpływ złych wiadomości na warunkową wariancję.

Szczególnym przypadkiem modelu (2.192), gdy $\gamma = 2$ jest model $AARCH$ (*Asymmetric GARCH*) rozważany przez Engla (por. Engle 1990) o następującej postaci dla jednostkowych rzędów modelu:

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \delta \varepsilon_{t-1} + \beta h_{t-1}. \quad (2.193)$$

Istnieje oczywiście znacznie więcej mniej popularnych rozwiązań w tym zakresie, które można znaleźć w literaturze.

Znacznie częściej wykorzystuje się modele z asymetrycznym nachyleniem ramion krzywej wpływu informacji.

Modele z asymetryczną krzywą wpływu informacji

W modelach tych opis efektu dźwigni uzyskuje się poprzez narzucenie warunku, iż lewe ramię krzywej ma rosnać szybciej niż prawe, czyli $f(-x) \geq f(x)$ dla $x \geq 0$. Modele te nazywa się czasami modelami „progowymi”, ponieważ w punkcie zero, mamy do czynienia ze zmianą parametrów modelu.

Najpopularniejszymi modelami z tej grupy są model $EGARCH(p, q)$ (*Exponential GARCH*) oraz zawierające się w modelu o następującej postaci :

$$h_t^{\frac{\gamma}{2}} = \omega + \sum_{i=1}^q [\alpha_i^+ |\varepsilon_{t-i}|^{\gamma} + \alpha_i^- \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} |\varepsilon_{t-i}|^{\gamma}] + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^{\frac{\gamma}{2}}, \quad (2.194)$$

gdzie:

$$\mathbb{I}_{(p)} = \begin{cases} 1; & \text{gdy } p = \text{prawda,} \\ 0; & \text{gdy } p = \text{fałsz.} \end{cases} \quad (2.195)$$

Spotyka się również alternatywną postać modelu (2.194):

$$h_t^{\frac{\gamma}{2}} = \omega + \sum_{i=1}^q [\alpha_i^+ \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} \geq 0)} |\varepsilon_{t-i}|^{\gamma} + \alpha_i^- \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} |\varepsilon_{t-i}|^{\gamma}] + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^{\frac{\gamma}{2}} \quad (2.196)$$

W powyższym modelu parametr γ jest parametrem podlegającym estymacji.

Gdy założyć się, że:

$\gamma = \mathbf{1}$, prowadzi to do znanego modelu *TARCH* (*Threshold ARCH*) wprowadzonego przez Zakoiana w 1990 roku modelującego asymetrię warunkowego odchylenia standardowego (por. Zakoian (1990)):

$$\sqrt{h_t} = \omega + \sum_{i=1}^q [\alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \alpha_i^- \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} |\varepsilon_{t-i}|] + \sum_{j=1}^p \beta_j \sqrt{h_{t-j}} \quad (2.197)$$

$\gamma = \mathbf{2}$, uzyskuje się bardzo popularny model Glostena, Jaganathana, Runklego (*GJR-GARCH*) z 1993 roku opisujący asymetrię warunkowej wariancji (por. Glosten, Jaganathan, Runkle (1993))

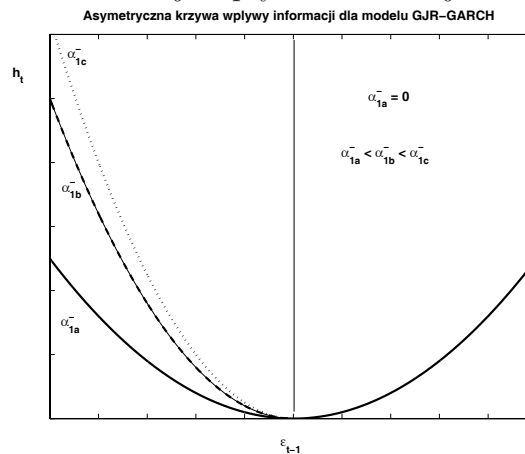
$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q [\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \alpha_i^- \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} \varepsilon_{t-i}^2] + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (2.198)$$

Funkcja wpływu informacji w modelu *GJR-GARCH* dana jest następującym wzorem:

$$h_t(\varepsilon_{t-1}) = \begin{cases} A + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 & \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ A + (\alpha + \alpha^-) \varepsilon_{t-1}^2 & \varepsilon_{t-1} < 0 \end{cases}. \quad (2.199)$$

Na rysunku 2.27. zaprezentowane zostały trzy przykładowe funkcje wpływu informacji możliwe do uzyskania w modelu *GJR-GARCH* dla trzech różnych wartości parametru α_1^- . Dla $\alpha_1^- = 0$ otrzymujemy model z symetrycznym wpływem informacji przeszłej na warunkową wariancję. Wraz ze wzrostem α_1^- rośnie efekt asymetrii i wzrasta różnica pomiędzy uwzględnianiem informacji dobrych i złych.

Rysunek 2.27: Przykładowe funkcje wpływu informacji dla modelu GJR-GARCH



Źródło: opracowanie własne.

Bezwarunkowa wariancja najczęściej wykorzystywanego modelu GJR-GARCH(1,1) dana jest wzorem:

$$V_{GJR-GARCH} = \frac{\omega}{1 - \bar{\alpha}_1 - \beta_1}, \quad (2.200)$$

gdzie:

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^-. \quad (2.201)$$

Najczęściej wykorzystywany model *GJR-GARCH(1,1)* przedstawia się często również w następujący sposób:

$$h_t = \omega + g_1\varepsilon_{t-1}^2 + g_2\varepsilon_{t-1}^2\mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1}<0)} + \beta h_{t-1} \quad (2.202)$$

$$g_1 = \alpha(1+c)^2, \quad g_2 = 2\alpha c^2, \quad (2.203)$$

co prowadzi do następującej postaci modelu:

$$h_t = \alpha h_{t-1} \left((1+c^2) \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{h_{t-1}} - 2c \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right) + \beta h_{t-1}. \quad (2.204)$$

Kolejnym modelem pozwalającym opisać efekt dźwigni przez wprowadzenie asymetrii w kształcie funkcji wpływu informacji jest zaproponowany w 1991 roku przez Nelsona model *EGARCH(p,q)* o następującej postaci (por. Nelson (1991)):

$$\ln h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j}, \quad (2.205)$$

gdzie: $z_t = \varepsilon_t / \sqrt{h_t}$.

Postać funkcji $g(\cdot)$ dobrana jest w taki sposób, by umożliwiała zarówno uwzględnienie wpływu znaku z_t , jak i wartości bezwzględnej.

$$g(z_t) \equiv \underbrace{z_t}_{\text{efekt znaku}} + \underbrace{\delta (|z_t| - E[|z_t|])}_{\text{efekt wartości bezwzględnej}}. \quad (2.206)$$

Model *EGARCH* jest modelem, którego postać zależy od przyjętego rozkładu warunkowego stóp zwrotu, czyli rozkładu z_t . Warto przypomnieć, iż na z_t nałożony jest

jedynie warunek niezależności, stałości rozkładu oraz jednostkowej wariancji i zerowej średniej. Najczęściej rozpatruje się w tym zakresie rozkłady: normalny, GED, symetryczny lub skośny t-Studenta. Dla poszczególnych rozkładów wartość $E[|z_t|]$ pojawiająca się we wzorze (2.206) dana jest następującymi wzorami:

- dla rozkładu normalnego:

$$E[|z_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (2.207)$$

- dla skośnego rozkładu : t-Studenta³⁸:

$$E[|z_t|] = \frac{2\xi^2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \frac{2\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}(\nu-1)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (2.208)$$

- dla rozkładu GED:

$$E[|z_t|] = \lambda 2^{\frac{1}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}, \quad (2.209)$$

gdzie λ jest stałą normującą daną wzorem (2.59).

Najczęściej jako warunkowy rozkład wykorzystuje się rozkład $N(0,1)$ i wtedy najpopularniejszy model $EGARCH(1,1)$ można przedstawić w następujący sposób:

$$\ln h_t = \omega + \alpha_{1a} \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} + \alpha_{1b} \left(\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{h_{t-1}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta_1 \ln h_{t-1}. \quad (2.210)$$

Przyjęcie ujemnej wartości α_{1a} pozwala modelować efekt dźwigni.

W modelu $EGARCH$, w przeciwieństwie do wcześniej rozpatrywanych modeli, nie ma ograniczenia, że parametry modelu muszą być dodatnie, co jest niewątpliwie zaletą modelu.

Funkcja wpływu informacji w modelu $EGARCH(1,1)$ dla normalnego rozkładu warunkowego dana jest następującym wzorem:

$$h_t(\varepsilon_{t-1}) = \begin{cases} A \exp \left[(\alpha_{1a} + \alpha_{1b}) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right]; & \text{dla } \varepsilon_{t-1} > 0 \\ A \exp \left[(\alpha_{1a} - \alpha_{1b}) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right]; & \text{dla } \varepsilon_{t-1} \leq 0, \end{cases} \quad (2.211)$$

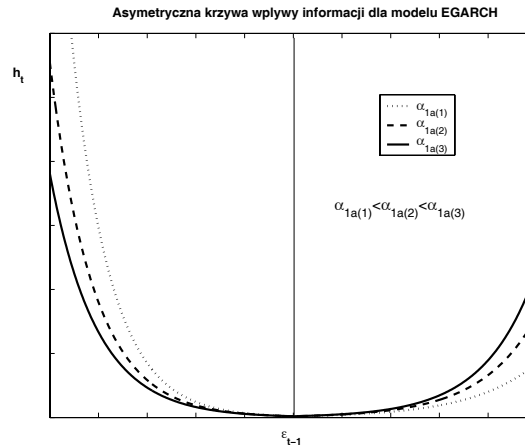
³⁸ Dla $\xi = 1$ uzyskujemy wzór dla symetrycznego rozkładu t-Studenta.

gdzie:

$$A \equiv h_{t-1}^{\beta_1} \exp \left[\omega - \alpha_{1b} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]. \quad (2.212)$$

Przykładowa funkcja wpływu informacji zaprezentowana jest na rysunku 2.28.

Rysunek 2.28: Przykładowa funkcja wpływu informacji dla modelu *EGARCH*



Źródło: opracowanie własne.

Jest to funkcja z minimum dla $\varepsilon_t = 0$, lecz o asymetrycznym nachyleniu ramion. W przeciwieństwie do modelu *GJR-GARCH*, ramiona funkcji nie są parabolami, lecz mają postać funkcji wykładniczych.

Wadą modelu *EGARCH* jest trudna aplikacja. Już samo wyestymowanie parametrów i oszacowanie błędów estymacji jest znacznie trudniejsze niż w przypadku modelu np. *GJR-GARCH*, który jest modelem liniowym w stosunku do h_t . Średnia wariancja bezwarunkowa dana jest także wzorem znacznie bardziej skomplikowanym, niż w przypadku modelu *GJR-GARCH*:

$$V_{EGARCH} = \exp \left[\frac{\omega - \alpha_{1b} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1 - \beta_1} + \frac{1}{2} \frac{(\alpha_{1a}^2 + \alpha_{1b}^2)}{1 - \beta_1^2} \right] \times \quad (2.213)$$

$$\times \prod_{m=0}^{\infty} [F_m(\alpha_{1a}, \alpha_{1b}, \beta_1) + F_m(-\alpha_{1a}, \alpha_{1b}, \beta_1)] \quad (2.214)$$

gdzie:

$$F_m(\alpha_{1a}, \alpha_{1b}, \beta_1) = N[\beta_1^m(\alpha_{1a} + \alpha_{1b})] \exp(\beta_1^{2m} \alpha_{1a} \alpha_{1b}), \quad (2.215)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (2.216)$$

Także wykorzystanie modelu *EGARCH* w zakresie prognozowania przyszłych wartości warunkowej wariancji nastęrcza zdecydowanie więcej problemów, niż dla modelu *GJR-GARCH*, czy *TARCH* (por. rozdz. 3.). Brak jest jednoznacznej odpowiedzi, który z modeli *EGARCH*, czy *GJR-GARCH* lepiej opisuje szeregi stóp zwrotu. Każdy z modeli ma swoich zwolenników i przeciwników (por. Bollerslev, Engle, Nelson (1994), Bera i Higgins (1995)).

Modelem umożliwiającym jednocześnie ujęcie efektu przesunięcia krzywej wpływu informacji oraz asymetrii w kształcie krzywej jest bardzo elastyczny model przedstawiony przez Hentschela. Model ten umożliwia również oczywiście analizę modeli nie uwzględniających efektu dźwigni (por. Hentschel (1995)). Zaproponowany model ma następującą postać:

$$\frac{h_t^{\frac{\xi}{2}} - 1}{\xi} = \omega + \alpha h_{t-1}^{\frac{\xi}{2}} f^\nu(z_t) + \beta \frac{h_{t-1}^{\frac{\xi}{2}} - 1}{\xi}, \quad (2.217)$$

gdzie:

$$f(z_t) = |z_t - b| - c(z_t - b). \quad (2.218)$$

W ramach tej postaci możliwe jest uzyskanie wszystkich zaprezentowanych wcześniej podstawowych modeli zarówno o symetrycznych, jak i asymetrycznych, przesuniętych, jak i nie przesuniętych funkcjach wpływu informacji na warunkową wariancję (por. Hentschel (1995)).

Modelowanie długoterminowej pamięci szeregów zmienności

Jak już zostało zasygnalizowane, w wielu przypadkach, szczególnie dla szeregów stóp zwrotu o dużej częstotliwości, wyestymowane parametry modelu *GARCH(p, q)* cechują się następującą własnością:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \approx 1. \quad (2.219)$$

Doprowadziło to do konieczności wprowadzenia osobnej podklasy modeli *IGARCH* (*Integrated GARCH*). Podklasa ta zaproponowana została przez Engla i Bollersleva i cechuje się tym, że informacja z dowolnie odległej przeszłości jest istotna w wyjaśnianiu bieżącej wartości warunkowej wariancji procesu, a bezwarunkowa wariancja procesu jest nieskończona (Bollerslev, Engle (1986)).

Model $IGARCH(p, q)$ zapisuje się w analogii do wzoru (2.183) w postaci:

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t, \quad (2.220)$$

gdzie $\phi(L)$ jest wielomianem rzędu $m-1$ o postaci:

$$\phi(L) \equiv [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}, \quad (2.221)$$

a $m = \max(p, q)$.

Najprostsza wersja modelu $IGARCH$ dana jest wzorem:

$$h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha)h_{t-1}. \quad (2.222)$$

Model ten okazał się przydatny do opisu zarówno stóp zwrotu z akcji, indeksów akcji, walut i towarów, ale także do opisu zmian poziomu stóp procentowych (por. np. Bera i Higgins (1995), Bollerslev, Engle, Nelson (1994), Knight, Satchell (1998)).

W przypadku modeli $GARCH$, wpływ informacji z chwili t maleje w kolejnych chwilach w sposób wykładniczy, a dla modeli $IGARCH$ nie zanika w ogóle. Okazało się jednak, że dla niektórych szeregów wpływ informacji z chwili t na kolejne wartości warunkowej wariancji maleje, ale wolniej niż dla modeli $GARCH$. Obserwacja ta doprowadziła do wprowadzenia (analogicznie do omawianego wcześniej modelu $ARFIMA$) procesu $FIGARCH(p, d, q)$ (*Fractionally IGARCH*) danego wzorem:

$$\phi(L)(1-L)^d\varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]\nu_t, \quad (2.223)$$

gdzie $(0 < d < 1)$ oraz wszystkie pierwiastki $\phi(L)$ i $[1 - \beta(L)]$ leżą poza okręgiem jednostkowym.

Alternatywnie wzór (2.223) można zapisać jako:

$$[1 - \beta(L)]h_t = \omega + [1 - \beta(L)\phi(L)(1-L)^d]\varepsilon_t^2, \quad (2.224)$$

czyli:

$$h_t = \omega[1 - \beta(1)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1-L)^d\}\varepsilon_t^2. \quad (2.225)$$

Model ten został wprowadzony przez Baillie'a, Bollersleva, i Mikkelsena w 1993 roku (por. Baillie, Bollerslev, Mikkelsen (1996)). W modelu tym funkcja autokorelacji kwadratów stóp zwrotu maleje w sposób hiperboliczny, czyli wolniej niż dla modelu $GARCH$, w którym maleje wykładniczo.

Efekt długoterminowej zależności danych w szeregach zmienności jest zdecydowanie silniejszy niż w przypadku stóp zwrotu, niemniej jednak w tym obszarze modele ułamkowe nie zyskały jeszcze należytej popularności.

W zastosowaniach praktycznych wykorzystuje się co najwyżej proste modele (por. Knight, Satchell (1998)), Jarrow (1998)), np. $FIGARCH(1, d, 1)$:

$$h_t = \omega + \beta_1 h_{t-1} + [1 - \beta_1 L - (1 - \phi_1 L)(1 - L)^d] \varepsilon_t^2. \quad (2.226)$$

Powyżej zaprezentowany został standardowy model $FIGARCH(p, d, q)$ wywodzący się z modelu $GARCH(p, q)$, niemniej możliwe jest wykorzystanie w ramach tej koncepcji także innych (np. asymetrycznych) modeli heteroskedastycznych opisujących h_t . Podejście uogólniające model $EGARCH$ przedstawili Bollerslev oraz Mikkelsen (por. Bollerslev, Mikkelsen (1996)), którzy zastosowali model do dziennych stóp zwrotu z indeksu S&P500 z okresu 1953-1990 i otrzymali oszacowanie parametru d na poziomie 0,63. Baillie, Bollerslev, Mikkelsen rozpatrywali modele dziennych stóp zwrotu z kursów DM/USD z okresu 1972-92. Analizie poddane zostały proste modele $GARCH$, $FIGARCH$ oraz $IGARCH$. Długoterminową zależność kwadratów reszt modelu najlepiej opisywał model $FIGARCH(1, d, 0)$ z parametrem $d = 0,823$.

Podsumowując rozważania o zaprezentowanych powyżej deterministycznych modelach warto zauważyć, iż w zastosowaniach praktycznych największą popularność zdobył najprostszy model $GARCH(1,1)$ oraz model $GJR-GARCH(1,1)$. Nieznacznie mniejszym zainteresowaniem cieszy się model $EGARCH(1,1)$. Nadal stosunkowo rzadko rozpatrywane są w praktyce modele umożliwiające opis (znacznie wyraźniejszej, niż w przypadku szeregów stóp zwrotu) długiej pamięci szeregów kwadratów reszt modelu.

Warto na koniec raz jeszcze zaznaczyć, iż o ostatecznych własnościach i jakości modelu decydują łącznie:

- postać rozkładu warunkowego,
- postać modelu warunkowej wartości oczekiwanej,
- postać modelu warunkowej wariancji.

Tabela 2.4: Zestawienie cech deterministycznych modeli warunkowej wariancji

Model	Skupianie zmienności	Efekt dźwigni	Długa pamięć	Uwagi
ARCH	X	-	-	wymagane wysokie rzędy modeli
GARCH	X	-	-	zadawalające własności przy małej liczbie parametrów
NARCH	X	-	-	umożliwia płynne przejście pomiędzy modelowaniem warunkowej wariancji a warunkowego odchylenia standardowego
QARCH	X	X	-	model z przesunięciem symetrycznej krzywej wpływu informacji
TARCH	X	X	-	model warunkowego odchylenia standardowego, asymetryczne nachylenie potęgowych ramion krzywej wpływ informacji
GJR-GARCH	X	X	-	model warunkowej wariancji, asymetryczne nachylenie parabolicznych ramion krzywej wpływ informacji
EGARCH	X	X	-	model warunkowej wariancji, asymetryczne nachylenie wykładniczych ramion krzywej wpływ informacji
FIGARCH	X	-	X	funkcja autokorelacji kwadratów reszt modelu maleje hiperbolicznie
IGARCH	X	-	X	nieskończona pamięć procesu kwadratów reszt modelu
FIEGARCH	X	X	X	bardzo rzadko analizowany model

Źródło: opracowanie własne.

Modelowanie efektu premii za ryzyko

Wiele teorii w finansach zakłada istnienie związku pomiędzy ryzykiem a oczekiwaną stopą zwrotu. W modelu linii rynku kapitałowego *CML* (por. Jajuga, Kuziak, Markowski (1997)) zakłada się na przykład liniowy związek pomiędzy zmiennością (odchyleniem standardowym), a premią za ryzyko.

Opis takiego związku umożliwia wprowadzony przez Engle'a, Liliena i Robinsa w 1987 roku modelu *ARCH-M* (*ARCH in Mean*), w którym zakłada się, iż warunkowa wartość oczekiwana zależy od warunkowej zmienności procesu:

$$\mu_t = \mu + \lambda g(h_t), \quad (2.227)$$

gdzie $g(\cdot)$ jest funkcją opisującą charakter wpływu warunkowej wariancji na warunkową wartość oczekiwaną. Wyrażenie $\lambda g(h_t)$ określa się jako premię za ryzyko, a λ to cena za jednostkę ryzyka ($\lambda > 0$).

Model ten łączy zagadnienie modelowania warunkowej wartości oczekiwanej z wartością warunkowej wariancji. Wariancja h_t może być opisana dowolnym modelem deterministycznym lub stochastycznym warunkowej zmienności.

Funkcja $g(h_t)$ może być zdefiniowana w ogólności poprzez transformatę Boxa-Coxa (por. Das, Sarkar (2000)), co prowadzi do tzw. modelu *ARCH-NM* (*ARCH in Nonlinear Mean*):

$$g(h_t) = \begin{cases} \frac{h_t^\xi - 1}{\xi}; & \xi \neq 0 \\ \ln h_t; & \xi = 0. \end{cases} \quad (2.228)$$

Standardowo wykorzystuje się jednak najczęściej jedną z trzech postaci modelu:

$$g(h_t) = \begin{cases} \sqrt{h_t}; & \xi = \frac{1}{2} \\ h_t; & \xi = 1 \\ \ln(h_t); & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.229)$$

W pracy Dasa przedstawiono wzory na wartość oczekiwaną, wariancję oraz autokorelację procesu opisanego modelem *ARCH-NM*. Model *ARCH-NM* wprowadza bowiem autokorelację w szeregu stóp zwrotu (por. Das, Sarkar (2000)).

Model *ARCH-NM* posiada ciekawą interpretację w postaci modelowania premii za ryzyko i fakt ten stanowi o jego głównej sile w teorii finansów. Co do jakości opisu szeregów stóp zwrotu sprawa jest już kontrowersyjna (por. np. Jarrow (1998)),

Bollerslev, Chou, Kroner (1992)). Hafner i Herwartz wykazali na przykład, że w wielu przypadkach nie posiadający interpretacji ekonomicznej prosty model zakładający efekt autoregresji w warunkowej wartości oczekiwanej może lepiej opisywać szeregi stóp zwrotu z akcji i indeksów (por. Hafner i Herwartz (1999)).

Testowanie efektu *ARCH* oraz estymacja parametrów modeli

Na zakończenie rozważań o modelach klasy *ARCH* zasygnalizowane zostaną zagadnienia związane z testowaniem efektu *ARCH*, estymacją parametrów modeli oraz wyborem modelu.

Do tej pory najpopularniejszym testem efektu *ARCH* jest zaproponowany przez Engle'a test oparty na mnożniku Lagrange'a (por. Engle (1982)). Hipoteza zerowa zakłada brak efektu *ARCH*, czyli $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q$. Statystyka *LM* równa się TR^2 , gdzie T to liczba wszystkich obserwacji, a R^2 to współczynnik determinacji równania regresji liniowej kwadratów reszt modelu ε_t^2 względem 1, ε_{t-1}^2 , ε_{t-2}^2 , ..., ε_{t-q}^2 oszacowanego metodą najmniejszych kwadratów:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2. \quad (2.230)$$

Statystyka TR^2 ma asymptotycznie rozkład χ^2 z q stopniami swobody. Wadą testu jest fakt, że trudno go w prosty sposób uogólnić na przypadek testowania efektu *GARCH*. Testowanie efektu *GARCH(1,1)* sprowadza się więc do testowania efektu *ARCH(1)*.

Inne testy dotyczące efektu *ARCH* znaleźć można w pracach przeglądowych (por. np. Bollerslev, Engle, Nelson (1994), Gouriéroux (1997), Tsay (2002)).

Poniżej zaprezentowana zostanie jedna z popularniejszych metod estymacji parametrów modeli klasy *ARCH* - **metoda największej wiarygodności**. Analizie podlega model o postaci:

$$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t} z_t, \quad (2.231)$$

gdzie μ_t to dowolnie zdefiniowana warunkowa wartość oczekiwana, a h_t to warunkowa wariancja procesu. Zmienna losowa z_t pochodzi z jednego z rozpatrywanych w podrozdziale 2.7. rozkładów takich, że $z_t \sim iid(0, 1)$. Dla uproszczenia zapisu wzorów, przyjmijmy:

$$\eta_t = r_t - \mu_t. \quad (2.232)$$

Wektor $\hat{\psi}$ parametrów modelu (2.231) zawierający parametry warunkowej wartości oczekiwanej, warunkowej wariancji oraz niekiedy parametry rozkładu (np. liczba stopni swobody oraz parametr określający skośność) wyznacza się poprzez maksymalizację (przy odpowiednich warunkach granicznych) logarytmu funkcji największej wiarygodności zdefiniowanego w zależności od rozkładu z_t w sposób następujący:

dla rozkładu normalnego:

$$LLF_N(\hat{\psi}_N; \eta_t, h_t) = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln h_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\eta_t^2}{h_t} \quad (2.233)$$

dla rozkładu t-Studenta:

$$\begin{aligned} LLF_S(\hat{\psi}_S; \eta_t, h_t) &= -\frac{T}{2} \ln(\pi(\nu - 2)) + T \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \right) - T \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) - \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{\eta_t^2}{(\nu - 2)h_t} \right) \end{aligned} \quad (2.234)$$

dla rozkładu GED:

$$\begin{aligned} LLF_G(\hat{\psi}_G; \eta_t, h_t) &= \sum_{t=1}^T \ln \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) - T \ln \left(\Gamma \left(\frac{1}{\nu} \right) \right) - T \left(\frac{\nu + 1}{\nu} \right) \ln(2) - \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left| \frac{\eta_t}{\lambda h_t^{\frac{1}{2}}} \right|^\nu \end{aligned} \quad (2.235)$$

dla rozkładu skośnego t-Studenta:

$$\begin{aligned} LLF_{skS}(\hat{\psi}_{skS}; \eta_t, h_t) &= T \left\{ -\frac{1}{2} \ln(\pi(\nu - 2)) + \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \right) - \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \ln(s) \right\} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ \ln(h_t) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (\nu + 1) \ln \left[1 + \frac{(s z_t + m)^2}{(\nu - 2)} \xi^{-I_t} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.236)$$

gdzie m i s dane są wzorami (2.80), (2.81), a z_t i I_t to:

$$z_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} = \frac{\eta_t}{\sigma_t}, \quad I_t = \begin{cases} 1 & \text{dla } z_t \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{dla } z_t < -\frac{m}{s} \end{cases}. \quad (2.237)$$

Oszacowanie błędów estymacji otrzymuje się na podstawie macierzy informacyjnej Fishera (por. np. Göing (1996), Gouriéroux (1997), Jarrow (1998)).

Po wyestymowaniu parametrów modelu, jakość samego modelu testuje się za pomocą typowych technik analizy standaryzowanych reszt modelu. Jeśli model jest dobry (prawidłowa postać oraz wartości parametrów), standaryzowane reszty³⁹ powinny pochodzić z rozpatrywanego rozkładu warunkowego oraz powinny cechować się niezależnością, w tym także niezależnością kwadratów standaryzowanych reszt. Odpowiednie procedury weryfikacji jakości modeli znaleźć można w pracy Bollersleva, Engle'a, Nelsona (por. Bollerslev, Engle, Nelson (1994)).

Wyboru pomiędzy alternatywnymi modelami dokonać można na podstawie uzyskanych wartości logarytmu funkcji największej wiarygodności.

W przypadku modeli zagnieżdżonych (zawierających się w sobie), wykorzystać można test ilorazu wiarygodności *LRT* (*Likelihood Ratio Test*) o następującej statystyce:

$$LRT = 2(LLF_1 - LLF_0), \quad (2.239)$$

gdzie:

LLF_1 - to wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z mniejszą liczbą restrykcji,

LLF_0 - to wartość logarytmu funkcji największej wiarygodności dla modelu z większą liczbą restrykcji.

Statystyka *LRT* ma rozkład asymptotyczny χ^2 z liczbą stopni swobody równą różnicy w liczbie restrykcji.

W przypadku modeli niezagnieżdżonych, jak i zagnieżdżonych można również posłużyć się jednym z tzw. kryteriów informacyjnych. Najpopularniejsze, możliwe do wykorzystania kryteria informacyjne zdefiniowane są w następujący sposób:

- Akaike'a:

$$AIC = -2LLF + 2k, \quad (2.240)$$

³⁹Przez standaryzowane reszty modelu rozumie się reszty postaci:

$$\hat{z}_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}. \quad (2.238)$$

- Schwartza:

$$SIC = -2LLF + 2 \ln k, \quad (2.241)$$

- Hannana-Quinna:

$$HQIC = -2LLF + 2k \ln(\ln N), \quad (2.242)$$

gdzie:

N - liczba obserwacji ,

k - liczba parametrów modelu.

Minimalna wartość kryteriów informacyjnych wskazuje na optymalną postać modelu. Wybór kryterium pozostaje sprawą subiektywną. Poszczególne kryteria z różną siłą uwzględniają wprowadzenie kolejnych parametrów modelu. **Najczęściej wykonywane jest kryterium Akaike'a.**

2.9.3. Modele zmienności stochastycznej

Prezentowane do tej pory modele dla czasu dyskretnego cechowały się tym, że co prawda były modelami dwurównaniowymi, w znaczeniu, iż osobne równanie opisywało zmiany stóp zwrotu i osobne zmiany w zakresie wartości zmienności, lecz istniało tylko jedno źródło losowości.

Podejście to można uogólnić w analogiczny sposób do tego, jaki zaprezentowany został na stronie 126 w odniesieniu do modeli z czasem ciągłym, a mianowicie poprzez wprowadzenia drugiego źródła losowości w równaniu warunkowej wariancji. Źródło losowości z równania warunkowej wariancji może być, lecz nie musi, skorelowane ze źródłem losowości z równania stóp zwrotu.

Modele takie nazywa się ogólnie **modelami stochastycznej zmienności** (*Stochastic Volatility Models - SV*). W modelach tych w przeciwieństwie do modeli klasy *ARCH*, warunkowa wariancja w chwili t nie jest powiązana zależnością czysto deterministyczną z informacjami dostępnymi w chwili $t-1$, lecz jest osobnym procesem stochastycznym.

Ze względu na znaczne trudności w estymacji parametrów modelu oraz w formułowaniu prognoz, modele te nie doczekały się jeszcze tak powszechnej popularności jak modele deterministyczne, choć potencjalnie poprzez wprowadzenie drugiego źródła losowości umożliwiając one lepsze dopasowanie do danych empirycznych.

Najprostszy i jednocześnie najczęściej rozważany model SV zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad (2.243)$$

$$\varepsilon_t = \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) z_t, \quad (2.244)$$

$$z_t \sim N(0, 1), \quad (2.245)$$

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, \quad (2.246)$$

$$\eta_t \sim N(0, 1). \quad (2.247)$$

Przyjęcie zależności wykładniczej w równaniu (2.244) zapewnia, analogicznie jak w modelu $EGARCH$, dodatnią wartość warunkowej wariancji niezależnie o wartości parametrów.

Model ten umożliwia opis skupiania wariancji, autokorelacji kwadratów stóp zwrotu, grubych ogonów rozkładu bezwarunkowego.

Jego popularność związana jest jednak przede wszystkim z faktem, że model ten jest naturalną dyskretyzacją procesów dyfuzji, w zakresie stóp zwrotu i zmienności, rozpatrywanych dla czasu ciągłego.

Powstało szereg uogólnień tego modelu pozwalających opisywać autokorelację w szeregach stop zwrotu, czy efekt dźwigni. Możliwe jest także wykorzystanie odmiennych rozkładów niż rozkłady normalne (por. Pajor (2001)).

Najpopularniejszy nadal jednak pozostaje, zdefiniowany równaniami (2.243)-(2.247), model SV z równaniem warunkowej wariancji zadanym przez proces autoregresji rzędu pierwszego, w którym oba źródła losowości są ze sobą nieskorelowane⁴⁰. W modelu tym proces h_t pozostaje stacjonarny dla $|\beta| < 1$, co zapewnia również ścisłą stacjonarność r_t . Bezwarunkowa wartość średnia oraz wariancja procesu h_t dane są wzorami:

$$\mu_h = E[h_t] = \frac{\omega}{1 - \beta}, \quad (2.248)$$

$$\sigma_h^2 = \text{var}[h_t] = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \beta^2}. \quad (2.249)$$

⁴⁰Przyjęcie ujemnej autokorelacji pomiędzy źródłami losowości pozwala modelować efekt dźwigni.

Wariancja bezwarunkowa r_t oraz kurtoza r_t w modelu SV dane są następującymi zależnościami:

$$\text{var}[r_t] = \exp\left(\frac{\sigma_h^2}{2}\right), \quad (2.250)$$

$$\text{kurt}[r_t] = 3 \exp\left(\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \beta^2}\right) > 3. \quad (2.251)$$

Niestety estymacja parametrów procesu metodą największej wiarygodności wymaga numerycznego obliczenia n -wymiarowej całki z łącznego rozkładu wektora obserwacji (r_t) i zmiennej nieobserwowalnej (h_t). Procedura ta została opisana np. w pracy Pajor (por. Pajor (2001)). Możliwe jest także wykorzystanie np. metody momentów, quasi-największej wiarygodności, wnioskowania bayesowskiego (por. Göing (1996)).

Ze względu na problemy z estymacją parametrów i formułowaniem prognoz, model ten nie zyskał jak do tej pory popularności. Nie będzie więc analizowany w dalszej części pracy. Zgodnie z zapowiedzią dalszym analizom w zakresie konstrukcji prognoz i wyceny opcji poddane zostaną jedynie modele o charakterze deterministycznym pochodzące z klasy modeli $ARCH$.

2.10. Modelowanie szeregów natychmiastowych stóp procentowych

Celem rozdziału jest przedstawienie pewnej klasy modeli szeregów stóp procentowych, które stanowią rozszerzenie zagadnień prezentowanych w związku z modelowaniem szeregów cen akcji, walut oraz towarów. **Nie jest to jednak główny nurt rozważań niniejszej pracy.** Znajomość procesu zmian stóp procentowych umożliwia wycenę prostych instrumentów zerokuponowych, instrumentów kuponowych, instrumentów pochodnych na stopy procentowe⁴¹. Znajomość procesów pewnych stóp procentowych wykorzystywana jest również w modelach wyceny instrumentów pochodnych na inne instrumenty niż stopy procentowe, gdzie zakłada się że wolna od ryzyka stopa procentowa nie jest stała (por. np. Wilmott (1999)).

Na rynku stóp procentowych analizowane są zmienne w czasie stopy procentowe, których zmiany są źródłem ryzyka.

Wyróżnia się cztery podstawowe rodzaje stóp procentowych. Poniżej wprowadzone zostaną ich definicje (por. Weron i Weron (1998)):

$R(t)$ - stopa natychmiastowa (*spot interest rate*)⁴²

N -okresowa natychmiastowa stopa procentowa jest to stopa procentowa dla pożyczki/lokaty⁴³ zaczynającej się natychmiast i trwającej N okresów⁴⁴.

$F(t, T)$ - stopa terminowa (*forward interest rate*)

Stopa terminowa reprezentuje natomiast oprocentowanie pożyczki/lokaty zawartej na pewien przyszły okres $[t, T]$.

$r(t)$ - natychmiastowa chwilowa stopa procentowa (*instantaneous spot rate*)

Natychmiastowa chwilowa stopa procentowa odpowiada oprocentowaniu pożyczki/lokaty rozpoczynającej się natychmiast i trwającej dowolnie mały okres $[t, t + dt]$.

⁴¹Jest to używany skrót myślowy, gdyż właściwie mówimy o instrumentach pochodnych wystawionych na instrumenty (umowy) zależne od poziomu stóp procentowych.

⁴²Niestety zachodzi konflikt oznaczeń pomiędzy natychmiastową i chwilową stopą procentową a prostą i logarytmiczną stopą zwrotu. Pozostaniemy jednak w tym podrozdziale przy typowych literaturowych oznaczeniach.

⁴³W rzeczywistości rozróżnieniu podlegają oczywiście stopy po których możemy zaciągać kredyt oraz te po których deponujemy środki pieniężne.

⁴⁴ N oczywiście nie musi być ani liczbą naturalną, ani większą od 1. Można analizować np. tygodniowe, miesięczne, roczne, czy pięcioletnie natychmiastowe stopy procentowe.

$f(t, T)$ - chwilowa stopa terminowa (*instantaneous forward rate*)

Analogicznie, chwilowa stopa terminowa odpowiada stopie pożyczki/lokaty ustalonej w chwili t , rozpoczynającej się w momencie T i zwracanej po nieskończenie krótkiej chwili.

Związki łączące poszczególne stopy procentowe znaleźć można na przykład w pracy Weron i Weron (por. Weron i Weron (1998)) oraz w pracy Wilmotta (por. Wilmott (1999)).

Modelowanie zachowania stóp procentowych rozważa się przede wszystkim w kontekście stóp natychmiastowych, gdyż pozwala to zastosować do modelowania zmian procesów, jak i do wyceny instrumentów dłużnych i instrumentów pochodnych na stopę procentową całego aparatu matematycznego związanego z procesami klasy Itô (por. Musiela i Rutkowski (1999)).

Oznaczając przez $P(t, T)$ wartość obligacji zerokuponowej, która w chwili T wypłaca jednostkę pieniężną, otrzymuje się następujące powiązania stóp procentowych z ceną obligacji:

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(T)} \quad (2.252)$$

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s)ds\right) \quad (2.253)$$

$$P(t, T) = E \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right). \quad (2.254)$$

Z zagadnieniem modelowania stóp procentowych wiąże się nieodłącznie pojęcie struktury czasowej (terminowej) stóp procentowych (krzywej dochodowości- *spot yield curve*). Definiuje się ją jako zależność stóp zwrotu (w skali rocznej) wolnych od ryzyka obligacji zerokuponowych od ich terminu wykupu (por. Hull (1998)). Struktura czasowa dla obligacji zerokuponowych obrazuje więc zależność pomiędzy stopami natychmiastowymi, a odpowiednimi terminami wykupu.

Najczęściej wykorzystywane modele możemy podzielić na (por. Weron i Weron (1998), Hull (1999)):

1.a. modele chwilowej stopy natychmiastowej, $r(t)$,

1.b. model terminowej chwilowej stopy procentowej, $f(t, T)$,

- 2.a. modele jednoczynnikowe,
- 2.b. modele wieloczynnikowe,
- 3.a. modele równowagi (*equilibrium models*),
- 3.b. modele braku arbitrażu (*no-arbitrage models*).

Podział na modele stóp $r(t)$ i $f(t, T)$ jest klarowny i wynika bezpośrednio z zaprezentowanych powyżej definicji tych stóp. Warto zauważyć, że stopa $r(t) = f(t, t)$. Ze względu na znacznie łatwiejszą aplikację, zdecydowanie częściej wykorzystuje się nadal modele chwilowej natychmiastowej stopy procentowej

Podział na modele jedno- i wieloczynnikowe wynika z przyjętej w modelu liczby źródeł losowości. Jest to sytuacja analogiczna jak z modelami cen instrumentów finansowych. Najprostsze modele klasy Itô z jednym źródłem losowości w postaci różniczki procesu Browna są modelami jednoczynnikowymi, a alternatywą są modele wieloczynnikowe (najczęściej dwuczynnikowe), które zakładają np., że proces powraca do zmieniającego się w sposób losowy poziomu średniego, bądź parametr zmienności procesu zmienia się w sposób losowy w czasie. Są oczywiście także inne koncepcje modeli wieloczynnikowych.

Modele równowagi w przeciwieństwie do modeli braku arbitrażu nie dopasowują się automatycznie do aktualnej struktury stóp procentowych. W modelach braku arbitrażu, dzisiejsza krzywa dochodowości jest parametrem wejściowym procedury szacowania modelu, natomiast w modelach równowagi pojawia się ona na wyjściu procedury, gdy dla oszacowanych parametrów modelu dokona się wyceny instrumentów bezkuponowych, a następnie wyznaczy się odpowiednie stopy w terminie do wykupu. Otrzymana w ten sposób krzywa dochodowości nie musi się zgadzać z aktualnie obserwowaną na rynku krzywą dochodowości.

W niniejszej pracy w obszarze zainteresowań znajdują się jedynie jednoczynnikowe modele równowagi chwilowej stopy natychmiastowej $r(t)$, które następnie zostaną rozszerzone do pewnej klasy modeli dwuczynnikowych zakładających zmienny w czasie parametr zmienności modelu.

Jednoczynnikowe modele równowagi dla chwilowej stopy natychmiastowej $r(t)$ dane są następującym równaniem:

$$dr(t) = m(r) + s(r)dB(t), \tag{2.255}$$

gdzie $m(r)$ i $s(r)$ są funkcjami jedynie zmiennego w czasie poziomu stóp procentowych, a parametry modelu są stałe w czasie. Jedynym źródłem losowości jest w tym modelu różniczka procesu Browna - $dB(t)$.

Szerokiego przeglądu i porównania modeli natychmiastowej chwilowej stopy procentowej dokonali w 1992 roku Chan, Karolyi, Longstaff i Sanders (por. Chan, Karolyi, Longstaff i Sanders (1992)). Analizowali oni modele zawarte w szerokiej klasie modeli możliwych do opisanego poprzez równanie - model CKSL:

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)^c)dt + \sigma r(t)^d dB(t), \quad (2.256)$$

co pozwala w ramach tego modelu na rozpatrywanie wielu standardowych modeli zawierających się w postaci ogólnej. W tabelicy 2.5. przedstawione zostaną typowe modele chwilowej stopy procentowej możliwe do otrzymania w ramach uogólnionego modelu CKLS. Przedstawione zostaną również odpowiednie restrykcje prowadzące do otrzymania konkretnego modelu.

Dla uproszczenia zapisu pominięto fakt, że poziom stopy procentowej jest funkcją czasu; $r = r(t)$.

Tabela 2.5: Przykładowe modele natychmiastowej stopy procentowej

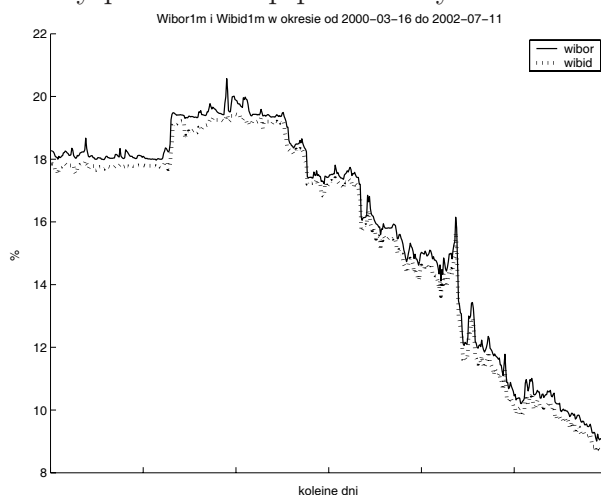
1. Merton	$dr = \alpha dt + \sigma dB$	$\beta = d = 0, c = 1$
2. Vasicek	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma dB$	$c = 1, d = 0$
3. CIR-SR	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^{\frac{1}{2}}dB$	$c = 1, d = 0,5$
4. Dothan	$dr = \sigma r dB$	$\alpha = \beta = 0, c = 1, d = 1$
5. Rendleman, Bartter	$dr = \alpha dt + \sigma r dB$	$\alpha = 0, c = d = 1$
6. Brennan, Schwartz	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r dB$	$c = d = 1$
7. CIR-VR	$dr = \sigma r^{\frac{3}{2}}$	$\alpha = \beta = 0, d = 0,75$
8. CEV	$dr = \beta dt + \sigma r^d dB$	$\alpha = 0$
9. Longstaff	$dr = (\alpha + \beta r^{\frac{1}{2}})dt + \sigma r^{\frac{1}{2}}dB$	$c = d = 0,5$

Źródło: opracowanie własne.

Można zauważyć, że w ogólnej postaci model CKLS umożliwia modelowanie powrotu do średniej, a także zakłada, że zarówno warunkowa wartość oczekiwana, jak i warunkowa wariancja może zależeć lub nie od wartości procesu.

W większości rozważań zakłada się, że stopy procentowe powracają do średniej. Sytuacja taka ma oczywiście miejsce w przypadku, gdy na rynku stóp procentowych nie ma zmian jakościowych. Trudno mówić o takiej sytuacji na rynku polskim. Rysunek 2.29 przedstawia zmiany poziomu jednomiesięcznej stopy WIBOR i WIBID w kolejnych dniach z okresu od 2000.03.13 do 2002.07.11.

Rysunek 2.29: Zmiany poziomu stóp procentowych WIBOR1m i WIBID1m



Źródło: opracowanie własne.

Może się to wiązać z dużymi problemami w przypadku próby zastosowania modeli zakładających standardowo powrót do średniej. Model CKLS jest jednak na tyle elastyczny, iż umożliwia również modelowanie procesów z trendem. Trudno jednak zakładać, iż trend taki będzie zachowany w dłuższym okresie.

Niemniej analizie, analogicznie jak w przypadku modeli cen instrumentów finansowych, poddaje się modele z czasem dyskretnym. Model dla czasu dyskretnego otrzymujemy na podstawie schematu Eulera ($r_t = r(t)$, $c = 1$):

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \sigma r_{t-1}^d z_t, \quad z_t \sim N(0, 1) \quad (2.257)$$

lub w postaci analogicznej porównywalnej z wcześniej rozważanymi modelami:

$$r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.258)$$

$$E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0 \quad h_t = E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \sigma^2 r_{t-1}^{2d}. \quad (2.259)$$

Takie przybliżenie procesy czasu ciągłego dla czasu dyskretnego jest najczęściej rozważane, choć w 1997 roku Nowman wykazał, że lepszą dyskretyzację uzyskuje się

poprzez dyskretyzację rozwiązania równania różniczkowego, co prowadzi do modelu:

$$r_t = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} [e^{\alpha_1} - 1] + e^{\alpha_1} r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.260)$$

gdzie:

$$E_{t-1}[\varepsilon_t] = 0, \quad E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \frac{\sigma^2}{2\alpha_1} [e^{2\alpha_1} - 1] r_{t-1}^{2d} \quad (2.261)$$

W większości prac wykorzystuje się jednak wzory (2.258) i (2.259) powstałe z zastosowanie schematu Eulera do równania (2.256).

Parametry modelu estymuje się najczęściej metodą największej wiarygodności zakładając normalny rozkład reszt modelu oraz ich warunkową średnią i wariancję daną wzorami (2.259), bądź metodą uogólnionych momentów zaproponowaną przez Hansena w 1982 roku (por. Chan, Karolyi, Longstaff i Sanders (1992), Mc Manus, Watt (1999)).

Jako przybliżenie chwilowej natychmiastowej stopy niezbędnej do oszacowania parametrów modelu, stosuje się stopy w terminie do wykupu bonów skarbowych o terminie wykupu nie dłuższym niż trzy miesiące. Im dłuższy termin do wykupu wykorzystanych instrumentów, tym większy błąd przybliżenia, gdyż estymacji nieobserwowalnej chwilowej stopy natychmiastowej dokonuje się na podstawie stóp zwrotu z instrumentów o znacznie dłuższych terminach wykupu. Rozważania na temat wpływu przybliżenia znaleźć można w pracy Mc Manusa i Watta (por. Mc Manus i Watt (1999)).

W przedstawionych badaniach empirycznych dla rynku amerykańskiego Chan, Karolyi, Longstaff i Sanders wykazali, że najważniejszym modelem determinującym jakość modeli okazał się parametr d , który oszacowany został dla modelu bez restrykcji jako $d \simeq 1,5$, co oznacza, że warunkowa wariancja rozważanego procesu zależy (poprzez równanie (2.259)) silnie od poziomu procesu. Jest to znacznie silniejsza wrażliwość wariancji warunkowej na zmiany poziomu procesu niż w modelach najczęściej przyjmowanych w analizach. Zaskoczeniem jest więc fakt, że często używane modele takie jak Vasicka, czy CIR-SR, gorzej opisują zmiany stóp natychmiastowych niż mniej znane modele Dothana czy CIR-VR.

Badania Chana, Karolyia, Longstaffa i Sandersa potwierdzone zostały także przez innych badaczy (por. m.in. Mc Manus i Watt (1999) oraz Ferreira (1998)), którzy uzyskali parametr d zbliżony do 1,5 dla szeregów stóp procentowych z rynku amerykańskiego, francuskiego i niemieckiego. Jedynie dla danych pochodzących z rynku kanadyjskiego parametr d pozostawał mniejszy od jedności.

Zaprezentowany powyżej modele noszą w literaturze nazwę modeli zależnych od poziomu (**Level models**), gdyż h_t zmienia się jedynie pod wpływem zmian poziomu procesu (por wzór (2.259)).

Modele te krytykowane były za fakt, że h_t nie zależy od napływających informacji, których miarą (analogicznie jak w przypadku modeli stóp zwrotu) jest reszta modelu ε_t . Modele te nie uwzględniają także obserwowanej w szeregach stóp procentowych autokorelacji warunkowej wariancji.

Rozwiązaniem było zaproponowanie specyficznej klasy modeli, które zaliczają się już do **modeli wieloczynnikowych**, w których warunkowa wariancja procesu opisywana jest drugim równaniem (por. Ferreira (1999)).

W najprostszej wersji takiego modelu warunkowa wariancja h_t z wzoru (2.259) zastąpiona zostaje modelem *GARCH*(1,1):

$$\begin{aligned} h_t &= \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 = \\ &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) h_{t-1} + \beta_2 (\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1}). \end{aligned} \tag{2.262}$$

Analogicznie jak w przypadku wcześniej opisywanych modeli *GARCH*, czynnik $(\varepsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$ ma zerową warunkową wartość oczekiwaną, β_2 mierzy wpływ zaburzenia (nowej informacji) na warunkową wariancję w przyszłym okresie, a $\beta_1 + \beta_2$ określa szybkość z jaką wpływ tego zaburzenia zanika w czasie.

Jako proces (2.262) może posłużyć każdy z opisywanych wcześniej modeli klasy *GARCH*, zarówno symetryczny, jak i asymetryczny. Ferreira postuluje wykorzystanie modelu *GJR-GARCH*, który dodatkowo umożliwia modelowanie asymetrii wpływu informacji. Modele takie nazwano ogólnie modelami z efektem *GARCH* (***GARCH Models***).

Okazało się jednak, że brak bezpośredniego wpływu poziomu procesu na warunkową wariancję dyskredytuje taki model w stosunku do stóp procentowych. Naturalnym rozwiązaniem było zaproponowanie modelu, w którym warunkowa wariancja zależałaby zarówno od poziomu procesu, jak i reszt modelu, czyli dopływających informacji. Modele takie nazwano modelami z efektem poziomu oraz efektem *GARCH* (***GARCH-Level Models***).

Rozwiązanie takie zaproponowali w stosunku do stóp procentowych Brenner, Harjes, Kroner (por. Brenner, Harjes, Kroner (1996)) oraz Koedijk, Nissen, Schotman i Wolff (por. Koedijk, Nissen, Schotman i Wolff (1997)).

W popularnym modelu tej klasy (*GJR-GARCH-Levels Model*) warunkowa wariancja procesu stóp procentowych dana jest układem równań:

$$h_t = E_{t-1}[\varepsilon_t^2] = \sigma_t^2 r_{t-1}^{2d}, \quad (2.263)$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (\beta_2 + \beta_3 \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)}) \varepsilon_{t-1}^2. \quad (2.264)$$

Warunkowa wariancja zależy zarówno od poziomu procesu r_t , jak i reszt modelu ε_t . Dodatkowo model umożliwia uwzględnienie asymetrii wpływu informacji „negatywnej” i „pozytywnej” na zmianę wariancji warunkowej⁴⁵.

Model dany wzorami (2.263) i (2.264) może zostać zapisany także w postaci:

$$\begin{aligned} h_t &= \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{h_{t-1}}{r_{t-2}^{2d}} + (\beta_2 + \beta_3 \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)}) \varepsilon_{t-1}^2 \right) r_{t-1}^{2d} = \\ &= \beta_0 r_{t-1}^{2d} + \beta_1 h_{t-1} \left(\frac{r_{t-1}}{r_{t-2}} \right)^{2d} + \beta_2 \varepsilon_{t-1}^2 r_{t-1}^{2d} + \beta_3 \varepsilon_{t-1}^2 \mathbb{I}_{(\varepsilon_{t-1} < 0)} r_{t-1}^{2d}, \end{aligned} \quad (2.265)$$

która umożliwia prostszą analizę współzależności warunkowej wariancji procesu od h_t i ε_t .

Model *GJR-GARCH-Level* zawiera w sobie czysty model zależny tylko od poziomu ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$) oraz model *GARCH* ($\beta_3 = d = 0$).

Analizując dane empiryczne dla rynku francuskiego oraz niemieckiego, Ferreira wykazał przydatność modelu *GJR-GARCH-Levels* do rynku francuskiego oraz *GARCH-Levels* dla rynku niemieckiego (por. Ferreira (1999)).

Inne propozycje w zakresie modelowania parametru σ_t poprzez różne modele klasy *GARCH* znaleźć można w pracy Ferreiry z 1999 roku.

Znaczenie modelu stóp procentowych wzrasta wraz z możliwością wyceny w jego ramach instrumentów dłużnych oraz instrumentów pochodnych na stopę procentową. Technika wyceny takich instrumentów przy założeniu, że natychmiastowa, chwilowa stopa procentowa opisywana jest modelem uwzględniającym zarówno efekt poziomu procesu, jak i efekt *GARCH* przedstawiona została w pracy Cvsa i Ritchkena z 2000 roku (por. Cvsa, Ritchken (2000)).

⁴⁵Pozostajemy przy standardowym określeniu, że w przypadku $\varepsilon_t > 0$ mamy do czynienia z informacjami „pozytywnymi”, a w przypadku $\varepsilon_t < 0$ - z informacjami „negatywnymi”, choć w przypadku stóp procentowych podział ten nie jest już tak przejrzysty jak dla modeli stóp zwrotu z akcji, walut, czy towarów.

Zagadnienie modelowania zmian stóp procentowych jest w ogólności zagadnieniem zdecydowanie odmiennym i trudniejszym niż modelowanie zmienności cen akcji, walut, czy towarów. Modelowaniu podlegać powinna bowiem cała krzywa dochodowości zarówno co do poziomu jak i zmienności w poszczególnych terminach zapadalności.

W niniejszym podrozdziale zaprezentowano zostało najprostsze podejście korespondujące wprost z modelami prezentowanymi we wcześniejszej części pracy umożliwiające modelowanie szeregów stóp procentowych. W ramach tej koncepcji, możliwe jest wykorzystywanie różnych modeli przede wszystkim warunkowej zmienności oraz warunkowych rozkładów.

Rozdział 3.

Prognozowanie zmienności

W rozdziale pierwszym niniejszej pracy przedstawione zostały obszary współczesnych finansów, w których zagadnienie zmienności stóp zwrotu instrumentów finansowych odgrywa zasadniczą rolę. Z najważniejszych takich zagadnień warto ponownie wymienić choćby analizę portfelową, wycenę opcji, strategie zabezpieczające, czy pomiar ryzyka metodą *VaR*. Problematyka ta analizowana jest zarówno pod kątem teorii finansów, jak i praktyki rynków finansowych. We wszystkich tych zagadnieniach występuje parametr zmienności. Nie zawsze jednak do końca uświadamiamy sobie, że występuje on jako prognoza nieznannej wartości zmienności w okresie przyszłym i skuteczność działań inwestorów zależy w dużej mierze od skuteczności tych prognoz. O tym jak istotne jest prognozowanie parametru zmienności w praktyce rynków finansowych może świadczyć również liczba publikacji z tej dziedziny. Bardzo szeroki przegląd wykorzystywanych technik opisujący stan teorii i praktyki w tym zakresie znaleźć można np. w takich przekrojowych opracowaniach, jak prace Knighta i Satchella (por. Knight, Satchell (red.) (1998)), Jarrova (por. Jarrow (1998)) czy Poona i Grangera (por. Poon, Granger (2001)).

Rozdział 3 poświęcony zostanie przedstawieniu koncepcji prognozowania zmienności instrumentów finansowych na podstawie zarówno informacji zawartych jedynie w szeregach cen instrumentów, jak i na podstawie rynkowych oszacowań przyszłego poziomu zmienności. W ramach prognozowania parametru zmienności na podstawie danych historycznych, wykorzystane zostaną podstawowe modele zaprezentowane w rozdziale drugim.

Na początku rozdziału przedstawione zostaną podstawowe pojęcia związane z prognozowaniem. Następnie dokonany zostanie przegląd podstawowych technik prognozowania zmienności. Rozdział zakończy przegląd oceny skuteczności prognoz.

3.1. Podstawowe pojęcia

Analizę zagadnień związanych z prognozowaniem zmienności rozpocznie przegląd podstawowych pojęć.

Definicja 3.1.

Przewidywanie - to wnioskowanie o zdarzeniach nie znanych na podstawie zdarzeń znanych (por. Cieślak (2000)).

Słownik języka polskiego (por. Szymczak (1988)) określa „przewidywanie” jako:

- dowiadywanie się o czymś (z przyszłości) na podstawie zebranych wiadomości i badań,
- przeczuwanie, odgadywanie, domyślanie się, co może nastąpić.

Na tej podstawie, w ramach przewidywania przyszłości, wyróżnia się przewidywanie (por. Cieślak (2000)):

- **racjonalne**, gdy wnioskowanie jest logicznym procesem przebiegającym od przesłanek (tj. zbioru faktów należących do przeszłości i teraźniejszości i ich interpretacji) do konkluzji.

W ramach racjonalnego przewidywania wyróżnia się dodatkowo:

- **przewidywanie zdroworozsądkowe**, gdy przesłanki i tok wnioskowania oparte są na doświadczeniu, bez posługiwania się regułami nauki,
- **przewidywanie naukowe**, gdy w procesie wnioskowania korzysta się jedynie z reguł nauki,
- **nieracjonalne**, gdy podczas procesu wnioskowania o przyszłości nie wyróżnia się przesłanek, lub gdy pomiędzy przesłankami a konkluzją brak jest związku przyczynowo-skutkowego.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że przewidywanie to nie tylko posługiwanie się narzędziami naukowymi, czy zdobytym doświadczeniem, ale także w jakimś stopniu „sztuka”. Ów element „sztuki”, czy „szczęścia” w zakresie szacowania zjawisk ekonomicznych może być w praktyce bardzo ważny. W zakresie praktyki rynków finansowych, niewątpliwie dokonuje się „przewidywania” poziomu przyszłej zmienności, zarówno na podstawie dostępnych wiadomości (uzyskanych metodami naukowymi lub na bazie posiadanego doświadczenia), jak i w jakimś stopniu przeczuć.

W obszarze teorii finansów, nie jest możliwe jednak posługiwanie się „przeczu-
ciami” czy nawet doświadczeniem, i z tego powodu tematem tego rozdziału jest **pro-
gnozowanie** zmienności instrumentów finansowych.

Definicja 3.2.

Prognozowaniem - nazywamy oparte na podstawach naukowych, racjonalne prze-
widywanie przebiegu i stanu możliwych przyszłych zdarzeń (rzeczy, faktów, zja-
wisk) (por. Kulawczuk (1987), str. 13).

Definicja 3.3.

Prognozą - nazywamy sąd o zajściu pewnego zdarzenia w przyszłości. Czas ten
może być określony zarówno z dokładnością do momentu (punktu), jak i okresu
(przedziału) (por. Czerwiński (1982)).

Powyższa definicja zostanie przyjęta na potrzeby tej pracy, warto jednak zazna-
czyć, że pojęcie prognozy może zostać zdefiniowane także w inny sposób.

Definicja 3.4.

Prognozą statystyczną - nazywa się sąd, którego prawdziwość jest zdarzeniem lo-
sowym, a prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia jest znane i wystarczająco
duże dla celów praktycznych (por. Hellwig (1977)).

Przez pojęcie „zdarzenia” występującego w definicji prognozy rozumie się, że ana-
lizowana zmienna przyjmie określony stan. Ogólnie prognozie podlegać mogą zdarze-
nia, w których zmienna ma charakter **jakościowy** (jest zmienną niemierzalną lub
słownym opisem zmiennej mierzalnej) lub **ilościowy** (stan zmiennej wyrażany jest
wartością liczbową).

W obu powyższych definicjach przez określenie „sąd” rozumie się zdanie orzeka-
jące o określonej wartości logicznej (prawda lub fałsz). Wartość tę można określić
dopiero po upływie czasu, dla którego prognoza została sformułowana. W definicjach
tych można jednak dostrzec także dwie zasadnicze różnice. W definicji 3.4. wyma-
gany jest określony stopień zaufania do prognozy, a w definicji 3.3. brak jest takiego
założenia. Dodatkowo definicja 3.3. odnosi prognozę tylko do zjawisk przyszłych, a
definicja 3.4. tego nie czyni.

Jak już zostało zasygnalizowane, w dalszej części pracy nie będzie wymagane przyjęcie określonego poziomu zaufania do prognoz, oraz prognozy te dotyczyć będą jedynie przyszłości. Jest to zgodnie z przyjęciem definicji 3.3.

W niniejszej pracy zmienną prognozowaną jest wartość parametru zmienności. W większości przypadków traktowana jest ona jako zmienna ilościowa, choć w pewnych specyficznych transakcjach opcyjnych spekuluje się na wzrost lub spadek poziomu zmienności. W takim przypadku, prognozowany wzrost lub spadek możemy utożsamiać ze zmienną jakościową.

W dalszej części praca dotyczyć będzie jednak przypadku, w którym poziom zmienności traktowany jest jako zmienna ilościowa, a otrzymana prognoza jest **prognozą punktową**, czyli na zakończenie procesu prognozowania otrzymywana jest konkretna wartość liczbowa. Nie rozpatrywaną w tej pracy możliwością jest tzw. **prognoza przedziałowa**, w której prognosta podaje przedział liczbowy, w którym w przyszłości znajdzie się prognozowana zmienna (por. Cieślak (2000)).

W ramach standardowego procesu prognozowania wyróżnia się następujące etapy:

- **sformułowanie zadania prognostycznego**

W etapie tym określa się obiekt, zjawisko, zmienne podlegające prognozie, cel prognozy oraz horyzont prognozy.

Rozpatrywanym w tym przypadku obiektem jest rynek finansowy, zjawiskiem - zmiany ceny instrumentu finansowego, zmienną - parametr zmienności.

Cel dokonywanej prognozy wiąże się z prezentowanymi w rozdziale pierwszym możliwościami wykorzystania wiedzy o przyszłym parametrze zmienności, np. odpowiednią dywersyfikacją portfela, wyceną instrumentów pochodnych, zabezpieczaniem portfela, pomiarem ryzyka rynku. Można powiedzieć, że celem prognozowania zmienności jest ograniczenie potencjalnych strat lub osiągnięcie ponadprzeciętnego dochodu.

Horyzont prognozy zależy od celu prognozy. Zazwyczaj zmienność prognozuje się na kolejny dzień (np. w pomiarze VaR) lub w postaci średniej na kolejnych kilka tygodni lub miesięcy (np. w wycenie opcji). Szczegółowo zaprezentowane zostanie to w dalszej części pracy.

- **podanie przesłanek prognostycznych**

Efektom pracy w tym etapie jest wytypowanie czynników mogących kształto-

wać dane zjawisko, weryfikacja odpowiednich hipotez, a następnie zgromadzenie zbioru niezbędnych danych.

W niniejszej pracy prognozy wyznaczane będą na podstawie danych o przeszłym kształtowaniu się zjawiska (na podstawie odpowiednich szeregów czasowych) oraz na podstawie oczekiwań rynku wynikających z wyceny odpowiednich instrumentów pochodnych. W drugim przypadku, poza informacją o cenach instrumentu bazowego należy zgromadzić jeszcze bazę danych o obserwowanych cenach opcji, poziomach stóp procentowych i charakterystykach opcji.

- **wybór metody prognozowania**

Metodą prognozowania nazywa się technikę przetwarzania informacji o przeszłości i teraźniejszości zjawiska oraz sposób uzyskania prognozy na podstawie przetworzonych informacji (por. Kulawczuk (1987), Cieślak (2000)).

Analizie poddane zostaną metody prognozowania oparte na:

- szeregach czasowych cen i zmienności,
- oszacowaniach wynikających z rynkowej wyceny opcji.

- **wyznaczenie prognozy**

Po wybraniu metody prognozowania i zgromadzeniu niezbędnych danych, prognosta dokonuje wyznaczenia prognozy. Prognozy wyznaczane będą z wykorzystaniem tzw. reguły podstawowej, zakładającej, że prognozą jest stan zmiennej prognozowanej otrzymywanej z modelu po wstawieniu do niego odpowiednich zmiennych. Reguła podstawowa jest stosowana, gdy zakłada się, że model, który opisywał w sposób poprawny przeszłość danego zjawiska, będzie sprawdzał się również w przyszłości, w okresie dla którego dokonuje się prognozy.

- **ocena dokładności prognozy i weryfikacja prognozy**

Po otrzymaniu prognozy niezbędne jest określenie poziomu zaufania do otrzymanego wyniku. Umożliwia to weryfikacja prognoz uzyskiwanych wewnątrz tzw. próby testowej dla określonej procedury lub weryfikacja prognoz (już poza próbą) uzyskiwanych wcześniej. Dokonuje się zarówno oceny co do różnic w wartościach oczekiwanych i zrealizowanych, jak i efektywności prognoz. W przypadku negatywnej weryfikacji wykorzystywanej techniki prognozowania, niezbędne staje się poszukiwanie innych technik. Obydwa podejścia weryfikacji (analiza błędów oraz efektywności prognoz) zaprezentowane zostaną w dalszej części pracy.

Z punktu widzenia prognozowania zmienności, w literaturze definiuje się następujące rodzaje zmienności (por. Natenberg (1994)):

- **zmienność przyszłą** (*future volatility*) - stanowiącą nieznaną wartość przyszłej zmienności danego instrumentu,
- **zmienność historyczną** (*historical, realized volatility*) - będącą miarą zmienności z przeszłych okresów i wyznaczaną na podstawie przeszłych notowań instrumentu,
- **prognozę zmienności** (*forecast volatility*) - będącą sądem na temat przyszłości zjawiska na podstawie informacji dostępnych w momencie formułowania prognozy; prognozą może być odpowiednio przetworzona informacja o zmienności historycznej (por. podrozdz. 3.2.1. i 3.2.2.), bądź odpowiednio zinterpretowana **zmienność implikowana** (*implied volatility*) wyznaczana na podstawie cen opcji wystawionych na instrument bazowy (por. podrozdz. 3.3.).

Zmienność przyszła jest więc parametrem nieznanym, o którego wartości wnioskuje się na podstawie odpowiednio skonstruowanych prognoz. Po upływie czasu równego horyzontowi prognozy, skuteczność prognozy poddawana jest ocenie na podstawie porównania zmienności prognozowanej ze zmiennością historyczną, zrealizowaną w rzeczywistości w badanym okresie.

W literaturze spotyka się dwa podejścia w zakresie prognozowania zmienności (odchylenia standardowego). Różnica polega na wykorzystaniu w procesie przetwarzania informacji z przeszłości bądź to oszacowań odchylenia standardowych, bądź wariancji. Te dwa możliwe podejście prowadzą do otrzymania zbliżonych wyników, lecz nie są, co wyraźnie należy podkreślić, tożsame. Nie ma jednoznacznej odpowiedzi, które z tych podejść jest lepsze. Najczęściej w ramach metod wykorzystujących szeregi czasowe wykorzystuje się podejście oparte na przetwarzaniu informacji o warunkowych lub bezwarunkowych wariancjach stóp zwrotu, natomiast w ramach podejścia wykorzystującego oszacowania rynkowe - o odchyleniu standardowym.

W dalszej części rozdziału rozwinięte zostaną zagadnienia związane z metodami prognozowania parametru zmienności. Przedstawionych zostanie szereg metod w ramach dwóch koncepcji prognozowania parametru zmienności:

- opartych na przeszłych wartościach zrealizowanej zmienności,

- opartych na oczekiwaniach rynku.

Dodatkowo warto zaznaczyć jeszcze, iż w ramach prognozowania zmienności wyróżnia się dwa podejścia polegające na:

- prognozowaniu wartości zmienności (lub wariancji) chwilowych dla kolejnych krótkich podokresów, czyli prognozowaniu warunkowych odchyłeń standardowych (wariancji) najczęściej w kolejnych dniach,
- prognozowaniu średniego poziomu odchylenia standardowego (wariancji) dla określonego okresu.

W całym rozdziale 3 zakłada się stały w czasie parametr warunkowej wartości oczekiwanej stóp zwrotu. Rozważany model ma postać:

$$r_t = \mu + \sigma_t z_t.$$

3.2. Metody oparte na analizie szeregów czasowych

Podstawowym wyróżnikiem tej metody jest korzystanie w procesie wyznaczania prognozy jedynie z opóźnionych, zrealizowanych wartości zmiennej prognozowanej oraz informacji możliwych do uzyskania z modeli historycznych stóp zwrotu.

Definicja 3.5.

Modelem szeregu czasowego - służącym do określenia przyszłej wartości zmiennej prognozowanej jest model formalny, którego zmiennymi objaśniającymi mogą być jedynie zmienna czasowa oraz przeszłe wartości lub prognozy zmiennej objaśnianej (por. Cieślak (2000)).

W technikach prognoz opartych na modelach szeregów czasowych wyróżnia się dwa podejścia:

- zakłada się, że zmienność warunkowa w kolejnych podokresach (dniach) jest stała. W przypadku prognozowania średniej zmienności w zadanym okresie (np. dla kolejnego miesiąca), prowadzi to do przyjęcia założenia, że zmienność w

całym okresie (każdego dnia) jest taka sama. Jest to podejście niezgodne z wynikami rozważań z rozdziału 2., w którym stwierdzono, iż w szeregach zmienności można wykazać efekt skupiania zmienności oraz „efekt dźwigni”, a także pamięci procesu. O ile podejście zakładające stałość parametru zmienności w całym okresie, dla którego tworzona jest prognoza, jest już podejściem rzadkim w sferze rozważań naukowych, o tyle w praktyce jest jeszcze nadal bardzo często wykorzystywane. Na przykład w modelach wyceny opcji z klasy Blacka-Scholesa zakłada się, że parametr zmienności jest stały i równy średniemu parametrowi zmienności w przeszłości. Z tego też powodu w pracy zaprezentowane zostały również techniki oparte na stałym, średnim współczynniku zmienności w okresie.

- zakłada się, że zmienność warunkowa w kolejnych np. dniach okresu jest zmienna i zależy od przeszłych informacji. W podejściu tym wykorzystuje się najczęściej szeroką gamę modeli klasy *GARCH*, które pozwalają modelować efekt skupiania danych, dźwigni, pamięci w procesie zmienności, a także co jest bardzo ważne w odniesieniu do jakości prognoz, pozwalają modelować efekt powrotu do średniej. Ze względu na wymienione własności, modele te stają się coraz bardziej popularne w zakresie konstrukcji prognoz, zarówno jednodniowej, jak i średniej zmienności.

3.2.1. Modele ze stałym parametrem zmienności w okresie

W podpunkcie tym przedstawione zostaną najprostsze techniki prognozowania poziomu zmienności w oparciu o informację o zrealizowanych w przeszłych okresach zmiennościach. **W podejściu tym przyjmuje się, że warunkowe wartości oczekiwane zmienności wewnątrz każdego okresu są stałe.** Najczęściej rozpatruje się przypadek prognozowania średniego poziomu zmienności w kolejnych miesiącach, co sprowadza się do prognozowania wartości zmienności w okresach o średniej długości $N = 21$ dni. Szeregiem czasowym, na podstawie którego dokonuje się prognoz, jest szereg zmienności zrealizowanych w przeszłych okresach np. w miesiącach. Stosowanie okresów krótszych niż miesiąc nie jest właściwie spotykane ze względu na błędy w oszacowaniu przeszłych wartości zmienności. Rzadko też stosuje się prognozy zmienności na podstawie szeregów średniej zmienności z okresów dłuższych niż 6 miesięcy.

Jak już zostało zasygnalizowane, zmienność przyszłą prognozuje się w oparciu o informacje o przeszłych, zrealizowanych odchyleniach standardowych stóp zwrotu (por. np. Balaban (1999), Rae (1997)) lub przeszłych, zrealizowanych wariancjach (por. np. Brailsford i Faff (1996), Yu (1998)). W tym podrozdziale zaprezentowane zostaną metody oparte na informacjach o zrealizowanych średnich wariancjach, co jest rozwiązaniem częściej przyjmowanym i pozwalającym zachować spójność z prezentowanymi w dalszej części metodami wykorzystującymi modele klasy ARCH.

Przyjęto następujące oznaczenia:

$s_{f,m}^2(x)$ – prognoza wariancji na okres m dokonana metodą x ,

$s_{h,m-i}^2$ – wariancja historyczna (zrealizowana) w okresie o i wcześniejszym niż okres m .

Zrealizowana wariancja w okresie (np. miesiącu) m ($s_{h,m}^2$) może zostać wyznaczona na podstawie dowolnego estymatora zaprezentowanego w rozdziale pierwszym niniejszej pracy. **Od przyjętego estymatora zależy również jakość prognoz.**

Po uzyskaniu prognozy przyszłej wariancji stóp zwrotu w okresie m , prognozę zmienności uzyskuje się jako:

$$s_{f,m}(x) = \sqrt{s_{f,m}^2(x)}. \quad (3.1)$$

Prognoza wariancji ($s_{f,m}^2(x)$) na najbliższy okres m formułowana jest na początku kolejnego okresu, na podstawie informacji o przeszłych zrealizowanych wariancjach ($s_{h,m-i}^2$).

Najczęściej, w ramach metod opartych na stałym parametrze warunkowej wariancji, wykorzystuje się następujące techniki prognoz:

⇒ **Metoda naiwna dana w postaci modelu błędzenia losowego (*Random Walk Model - RW*)**

W metodzie tej prognozę zmienności uzyskuje się według następującej formuły:

$$s_{f,m}^2(RW1) = s_{h,m-1}^2 \quad (3.2)$$

Metoda ta oparta jest na znanym modelu błędzenia losowego. W wersji najprostszej zakłada się, że najlepszą prognozą zmienności na kolejny okres jest zmienność zrealizowana w okresie poprzedzającym.

Jeżeli szereg charakteryzuje się roczną sezonowością¹, skuteczne może okazać się stosowanie następującej prognozy:

$$s_{f,m}^2(RW2) = s_{h,m-12}^2 \quad (3.3)$$

Podstawową zaletą metod naiwnych jest ich prostota. Metody naiwne mogą być używane do porównania trafności konstruowanych za ich pomocą prognoz z prognozami budowanymi innymi, bardziej skomplikowanymi metodami. Oceny takie określają celowość stosowania innych, bardziej skomplikowanych metod prognozowania.

Warto zaznaczyć, że jest to najczęściej stosowana metoda w takich zagadnieniach jak analiza portfelowa, wycena opcji, zabezpieczanie portfela.

⇒ **Metoda średniej historycznej (*Long-Term Mean Model - LTM*)**

$$s_{f,m}^2(LTM) = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m-1} s_{h,m-j}^2 \quad (3.4)$$

Przy założeniu, że zmienność jest procesem stałym w czasie, najlepszym oszacowaniem wariancji jest średnia z wszystkich, dostępnych wariancji zrealizowanych w okresach wcześniejszych. Wraz z upływem czasu, prognoza dokonywana jest na podstawie coraz większego zbioru informacji.

⇒ **Metoda średniej ruchomej (*Moving Average Model - MA*)**

Metoda ta polega na przyjęciu założenia, że prognozę uzyskuje się przez uśrednianie informacji o poziomie wariancji w L ostatnich okresach (L - stała wygładzania).

$$s_{f,m}^2(MA) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L s_{h,m-j}^2 \quad (3.5)$$

Metody średniej ruchomej stosuje się w celu poprawienia dokładności prognoz, o ile w szeregu czasowym zmiennej prognozowanej występują znaczne wahania przypadkowe. Zastosowanie metod naiwnych prowadzi w takim przypadku zazwyczaj do powstawania dużych błędów. Wybór stałej wygładzania stanowi kompromis pomiędzy tempem odzwierciedlania aktualnych zmian w wartości prognozowanej zmiennej, a wpływem wahań przypadkowych. Wartość stałej wygładzania może być dobierana

¹Czasami rozważa się tzw. zmienność sezonową (*seasonal volatility*) związana przede wszystkim ze zmiennością kursów towarów rolnych.

poprzez minimalizowanie błędu prognozy wewnątrz próby za pomocą jednej z miar błędu *ex post* (por. str. 198). Wadą modelu prostej średniej ruchomej jest nadawanie jednakowych wag wszystkim L wartościom uwzględnianych wariancji, na podstawie których dokonuje się prognozy. Modyfikacja może polegać na przypisaniu większej wagi obserwacjom późniejszym (bliższym momentowi prognozy), które powinny nieść bardziej aktualne informacje. Procedura taka nazywana jest „postarzaniem informacji”. Odpowiadający jej model nazywa się modelem średniej ruchomej ważonej:

$$s_{f,m}^2(WMA) = \sum_{j=1}^L w_j \sigma_{h,m-j}^2$$

$$0 < w_i < 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, L$$

$$\sum_{i=1}^L w_i = 1$$
(3.6)

W modelu tym należy dokonać wyboru zarówno wartości stałej wygładzania (liczby wyrazów na podstawie których wyznacza się prognozę), jak i wag przypisanych do poszczególnych wariancji z wcześniejszych okresów. Możliwe jest zastosowanie następującego systemu wag:

$$w_i = \frac{2(L+1-i)}{L(L+1)}.$$
(3.7)

W przypadku przyjęcia $L=5$, uzyskuje się następujący system wag postarzających informację o zrealizowanych wariancjach: $w_1=0,333$; $w_2=0,267$; $w_3=0,200$; $w_4=0,133$; $w_5=0,067$.

Metodę średniej ruchomej stosuje się, gdy w analizowanym szeregu nie występuje trend oraz wahania okresowe.

Kolejną techniką, która znajduje częste zastosowanie jest prognozowanie za pomocą modeli wygładzania wykładniczego. Wyróżnia się model prostego wygładzania wykładniczego oraz wykładniczo ważonej średniej ruchomej. W obu przypadkach występuje efekt postarzania informacji.

⇒ Modele wygładzania wykładniczego

- proste wygładzanie wykładnicze (*Exponential Smoothing Model*)

Wygładzanie wykładnicze zaprezentowane zostało w odniesieniu do prognoz zmienności w pracy Dimsona i Marsha (por. Dimson, Marsh (1990)), a następnie spopularyzowane przez wykorzystanie w procedurze RiskMetrics zaproponowanej przez bank J.P.Morgan (por. Guldiman (1995)):

$$s_{f,m}^2(ES) = \alpha s_{f,m-1}^2(ES) + (1 - \alpha) s_{h,m}^2.$$
(3.8)

Jest to model zakładający, iż prognozę przyszłej wariancji uzyskuje się jako średnią ważoną z wartości wariancji zrealizowanej w ostatnim okresie oraz ostatniej sformułowanej prognozy. Parametr α zwany jest parametrem wygładzania i zawiera się w przedziale $[0,1]$. Gdy parametr wygładzania wynosi 1, to model sprowadza się do modelu prognozy naiwnej.

Wzór powyższy można zapisać również w postaci następującej:

$$s_{f,m}^2(ES) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{i-1} s_{h,m-1}^2, \quad (3.9)$$

co wyjaśnia nazwę modelu, w którym mamy do czynienia z wykładniczym „postarzaniem informacji” z okresów wcześniejszych. Model ten można więc przyrównać do modelu średniej historycznej, w którym kolejnym obserwacjom coraz bardziej odległym od chwili tworzenia prognozy, nadaje się zanikające wykładniczo wagi. Podejście to znajduje zastosowanie przede wszystkim w przypadku, gdy w szeregu czasowym mamy do czynienia z prawie stałym poziomem zmiennej prognozowanej oraz wahaniami przypadkowymi.

- wykładniczo ważona średnia ruchoma (*Exponential Weighted MA Model - EWMA*)

Model ten jest podobny do modelu wygładzania wykładniczego, lecz oszacowanie zmienności zrealizowanej w ostatnim okresie zastąpione zostało średnią ruchomą z ostatnich L okresów. Pozwala to na zmniejszenie wpływu obserwacji nietypowych - szczególnie wysokich lub niskich wartości zrealizowanej wariancji w pojedynczych okresach.

$$s_{f,m}^2(EWMA) = (1 - \alpha) s_{f,m-1}^2(EWMA) + \alpha \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L s_{h,m-j}^2 \quad (3.10)$$

Gdy parametr wygładzania wynosi 1, to model ten sprowadza się do modelu średniej ruchomej.

Dla obu modeli wygładzania wykładniczego, wartość parametru wygładzania dobiera się eksperymentalnie minimalizując błąd prognozy wewnątrz próby uczącej. Pierwszą wartość prognozy wybiera się zwykle jako średnią arytmetyczną kilku początkowych obserwacji zmiennej prognozowanej. Parametr α może być dobierany po pojawieniu się każdej kolejnej obserwacji (wariancji z kolejnego okresu, np. miesiąca) lub rzadziej (np. raz w roku).

⇒ **Model autoregresyjny (*Autoregression Model - AR*)**

Modele regresyjne stosuje się, gdy zachodzi podejrzenie, że w analizowanym szeregu zachodzi efekt opóźnień w przebiegu zjawiska.

$$s_{f,m}^2(RM) = \beta_0 + \beta_1 s_{h,m-1}^2 + \beta_2 s_{h,m-2}^2 + \dots + \beta_p s_{h,m-p}^2 + \varepsilon_m, \quad (3.11)$$

gdzie ε_m jest resztą modelu, a p - rzędem modelu autoregresji.

Parametry modeli szacuje się najczęściej klasyczną metodą najmniejszych kwadratów. Parametry modelu regresji mogą być szacowane na podstawie wszelkich dostępnych informacji lub na podstawie ostatnich M miesięcy. W modelu tym należy założyć również rząd autoregresji, bądź wyznaczyć go jako wartość minimalizującą błąd prognozy wewnątrz próby uczącej.

3.2.2. Metody oparte na modelach *GARCH*

Założenie o stałości w czasie warunkowych wariancji pozostaje sprzeczne z obserwacjami empirycznymi. Zagadnienie to omówione zostało w rozdziale 2. Naturalnym uogólnieniem wydaje się przyjęcie założenia, iż prognozy powinny uwzględniać również wszystkie omówione własności szeregów zmienności, takie jak powrót do średniej, efekt dźwigni, długa pamięć procesu. Wykorzystane mogą być, omówione w podrozdziale 2.9., modele zarówno z czasem ciągłym lub dyskretnym oraz modele zarówno deterministyczne, jak i stochastyczne.

Próba wykorzystania modeli z czasem ciągłym oraz modeli stochastycznych dla czasu dyskretnego wprowadza wiele trudności związanych z samą estymacją parametrów i z formułowaniem prognoz (por. Knight, Satchell (1998), Jarrow (1998)), nie gwarantując znacząco lepszych własności uzyskanych prognoz niż dla modeli deterministycznych (por. Poon, Granger (2001)). Z tego też powodu dalsze rozważania ograniczone zostaną do przedstawienia idei konstrukcji prognoz warunkowej wariancji jedynie za pomocą modeli deterministycznych dla czasu dyskretnego, wywodzących się z klasy modeli *GARCH*.

W podejściu tym, prognozie podlegają warunkowe wariancje dla kolejnych podokresów (najczęściej dni), niemniej odpowiednie uśrednienie wartości prognoz uzyskanych dla poszczególnych podokresów, umożliwi wyznaczenie średniego poziomu zmienności (np. prognozy średniej zmienności w kolejnym miesiącu). Prognozy dziennych, warunkowych wariancji służą najczęściej do pomiaru *VaR*, zaś średnie zmienności z dłuższych okresów mogą być wykorzystane w procesie analizy portfelowej lub

przy wycenie opcji. Zagadnienia te zasygnalizowane zostały w rozdziale 1. Przykłady empiryczne wykorzystania jednodniowych i średnich prognoz wariancji zaprezentowane zostaną w rozdziale 4.

Pierwszą pracą wykorzystującą modele klasy *GARCH* do prognozowania średniego poziomu zmienności w zadanym horyzoncie była praca Akgiray'ego z 1989 roku, w której wykorzystano model *GARCH(1,1)* (por. Akgiray (1989)). Praca ta zapoczątkowała okres szczególnego zainteresowania różnymi modelami klasy *GARCH* w kontekście już nie modelowania, a prognozowania zmienności. Czym innym są bowiem własności modelu w zakresie umiejętności dopasowania do danych empirycznych wewnątrz próby, a czym innym możliwości prognostyczne poza próbą. Praca ta udowodniła, iż nawet zastosowanie tak prostego modelu zmiennych, warunkowych wariancji może prowadzić do uzyskania lepszych wyników, niż dla modeli ze stałym współczynnikiem zmienności. Prace nad wykorzystaniem modeli heteroskedastycznych przy konstrukcji prognoz zmienności nadal trwają. Wykorzystuje się wszelkie modyfikacje modelu *GARCH* omówione w rozdziale 2, a mianowicie modele z odmiennymi od normalnego rozkładami warunkowymi, modele z symetrycznym i asymetrycznym wpływem informacji na warunkową wariancję oraz modele z krótką lub długą pamięcią procesu. **Należy pamiętać również, iż o jakości prognoz decyduje odpowiednio dobrana postać warunkowej wartości oczekiwanej modelu.** Ponieważ przyjęta została koncepcja, że wszystkie wykorzystywane warunkowe rozkłady są rozkładami o jednostkowej wariancji i zerowej średniej, to postać rozkładu nie wpływa na technikę prognozowania, a jedynie na wartości parametrów modeli. Jakość prognoz zależy także od tego, czy prawidłowo wyestymowane zostały parametry modelu. Już dla najprostszych modeli, które są najczęściej wykorzystywane, estymacja parametrów sprowadza się do maksymalizacji funkcji największej wiarygodności w wielu wymiarach. Nieprawidłowa estymacja parametrów (np. znalezienie jedynie maksimum lokalnego), skutkować będzie także błędnym oszacowaniem informacji z chwil poprzedzających prognozę (wartości \hat{h}_t oraz $\hat{\varepsilon}_t$), które stanowią warunek początkowy dla prognoz. Zagadnienie to zaprezentowane zostanie w dalszej części podrozdziału.

Prognozowanie zmienności za pomocą modeli *GARCH* sprowadza się do prognozowania warunkowych wariancji procesu w przyszłości. W praktyce wykorzystuje się głównie modele będące uogólnieniami modelu *GARCH(1,1)*, co spowodowane jest dobrymi własnościami modelu o nieskomplikowanej postaci. Zwiększenie rzędu modelu

rzadko kiedy prowadzi do poprawienia jakości prognoz.

Główna idea zaprezentowana zostanie w oparciu o model $GARCH(1,1)$. W dalszej części przedstawione zostaną możliwe uogólnienia.

Prognozowanie za pomocą modelu $GARCH(1,1)$

Prognozę w chwili t na jeden okres do przodu uzyskuje się w modelu $GARCH(1,1)$ bezpośrednio przez podstawienie do wzoru (2.184) danych o aktualnej wariancji warunkowej \hat{h}_t oraz reszcie modelu $\hat{\varepsilon}_t$. Obie te wartości otrzymuje się w trakcie procedury dopasowania modelu do danych empirycznych.

Oznaczając przez:

\hat{h}_t - oszacowaną warunkową wariancję w chwili t ,

$\hat{\varepsilon}_t$ - oszacowaną resztę modelu w chwili t ,

$(\hat{\mu}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$ - wektor oszacowanych parametrów modelu,

$h_{f,t+k}$ - prognozę warunkowej wariancji w momencie t na chwilę $t+k$,
otrzymujemy:

$$h_{f,t+1} = \hat{\omega} + \alpha_1(r_t - \hat{\mu})^2 + \hat{\beta}\hat{h}_t, \quad (3.12)$$

co zapisuje się krócej w postaci:

$$h_{f,t+1} = \hat{\omega} + \alpha\hat{\varepsilon}_t^2 + \hat{\beta}\hat{h}_t. \quad (3.13)$$

Engle i Bollerslev wykazali, że prognoza warunkowej wariancji na chwilę $(t+k)$ dana jest następującym wzorem (por. Engle, Bollerslev (1986)):

$$h_{f,t+k} = \hat{\omega} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})h_{f,t+k-1}, \quad (3.14)$$

czyli:

$$h_{f,t+k} = \hat{\omega} \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^i + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{k-1} h_{f,t+1}. \quad (3.15)$$

Na podstawie wzorów (3.13) oraz (3.15) widać, dlaczego tak ważne jest prawidłowe oszacowanie zarówno parametrów procesu, jak i reszt modelu i warunkowej wariancji w chwili t .

Można wykazać, że gdy $k \rightarrow \infty$, to $h_{f,t+k} \rightarrow V_{GARCH}$, gdzie V_{GARCH} to długoterminowa bezwarunkowa wariancja procesu dana wzorem (2.185).

Wzór (3.15) można zapisać również jako:

$$h_{f,t+k} = V_{GARCH} + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{k-1} (h_{f,t+1} - V_{GARCH}). \quad (3.16)$$

Modele *GARCH* charakteryzują się więc własnością umożliwiającą opis efektu powrotu do średniej. Wyznaczona dla chwili t wartość \hat{h}_t określa poziom, od którego wartości kolejnych prognoz będą powracać do długoterminowej średniej. Zgodnie z tym, co było zasygnalizowane w rozdziale 2, za szybkość powrotu do średniej wariancji, odpowiedzialne jest wyrażenie $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Im bliższa jedności wartość wyrażenia $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$, tym wolniej prognozy warunkowej wariancji dla kolejnych dni powracają do długoterminowej średniej. Mówi się wtedy o wzrastającej **długości wpływu informacji** na prognozy.

Model szeregu zmienności jest modelem o długim wpływie informacji, gdy stopa zwrotu z chwili t ma duży wpływ na prognozy zmienności na wiele okresów w przód.

Miarą takiej długości wpływu informacji jest wyrażenie (por. Engle, Patton (2001)):

$$\theta_{t+k} = \frac{\partial h_{f,t+k}}{\partial \varepsilon_t^2}. \quad (3.17)$$

Dla modelu *GARCH(1,1)* uzyskuje się:

$$\frac{\partial h_{f,t+k}}{\partial \varepsilon_t^2} = \hat{\alpha}(\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{k-1}. \quad (3.18)$$

Potwierdza to własność modelu *GARCH*, jaką jest powracanie warunkowych wariancji do średniej.

Z postaci powyższego wzoru widać, iż wpływ informacji z chwili t , na kolejne prognozy warunkowej wariancji zanika geometrycznie. Łatwo wykazać również że gdy $(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \rightarrow 1$, czyli gdy model *GARCH* zbliża się do modelu *IGARCH*, to $\theta_{t+k} \rightarrow \alpha$ i wpływ informacji z chwili t jest stały i nigdy nie zanika. Dla bardziej skomplikowanych modeli pochodną we wzorze na miarę długości wpływu informacji wyznacza się numerycznie.

Jako miarę szybkości powrotu warunkowych wariancji do średniej, przyjmuje się również tzw. „czas połowicznego powrotu” (*half-life*), czyli czas jaki potrzebuje warunkowa wariancja (prognoza), by po zaburzeniu z chwili t , zmniejszyć odchylenie od

swego długoterminowego poziomu średniego o połowę (por. Engle, Patton (2001)). Miara ta zdefiniowana jest w następujący sposób:

$$\tau = k : |h_{f,t+k} - V| = \frac{1}{2}|h_{f,t+1} - V|. \quad (3.19)$$

Tabela 3.1 prezentuje „czasy połowicznego powrotu” dla wybranych wartości parametrów procesu $GARCH(1,1)$.

Tabela 3.1: Czasy połowicznego powrotu dla modelu $GARCH(1,1)$

$(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$	τ
0,500	2,00
0,750	3,40
0,850	5,26
0,950	14,51
0,975	28,37
0,985	46,86
1,000	∞

Źródło: obliczenia własne.

W oparciu o prognozy warunkowej wariancji w kolejnych dniach analizowanego okresu, możliwe jest wyznaczenie prognozy średniego poziomu wariancji w analizowanym okresie.

Prognozę zmienności dla okresu T dni uzyskuje się na podstawie informacji o prognozach wariancji warunkowych z okresu $[t, t+T]$, tzn.:

$$h_{f,t}^{(T)} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T h_{f,t+k}, \quad (3.20)$$

gdzie $h_{f,t}^{(T)}$ to prognoza średniej wartości wariancji w okresie $[t, t+T]$.

Prognozę zmienności uzyskuje się oczywiście jako pierwiastek z prognozy wariancji.

Można wykazać, że dla modelu $GARCH(1,1)$:

$$h_{f,t}^{(T)} = \frac{1}{T} \left[\hat{\omega} \sum_{k=1}^T \sum_{i=0}^{k-2} (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^i + \sum_{k=1}^T (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{k-1} h_{f,t+1} \right], \quad (3.21)$$

co zapisuje się również w postaci:

$$h_{f,t}^{(T)} = V_{GARCH} + (h_{f,t+1} - V_{GARCH}) \frac{1}{T} \frac{1 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^T}{1 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})}. \quad (3.22)$$

Także dla średniego poziomu zmienności w zadanym okresie zachodzi powrót do średniej. Szybkość powrotu zależy w oczywisty sposób od wartości $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

Analogicznie do wzoru (3.17) definiuje się miarę długości wpływu informacji na wartość średniej wariancji warunkowej:

$$\phi_{t,t+T} = \frac{\partial h_{f,t}^{(T)}}{\partial \varepsilon_t^2} = \frac{\partial \left(\frac{1}{T} (h_{f,t+T} + h_{f,t+T-1} + \dots + h_{f,t+1}) \right)}{\partial \varepsilon_t^2} \quad (3.23)$$

Wzór (3.21) pozwala wyznaczyć wartość średniego poziomu wariancji dla dowolnie długich okresów T . Prowadzi to do tak zwanych **struktur terminowych prognozowanych wariancji**.

Można wykazać, że niezależnie od poziomu warunkowej wariancji w chwili t , średnie poziomy wariancji dla dwóch dowolnych okresów T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$) łączy zależność:

$$\left[h_{f,t}^{(T_1)} - V \right] = \frac{T_2 (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{T_1} - 1}{T_1 (\hat{\alpha} + \hat{\beta})^{T_2} - 1} \left[h_{f,t}^{(T_2)} - V \right] \quad (3.24)$$

W oparciu o prognozy warunkowej wariancji na kolejny dzień można wyznaczać miarę VaR (por. np. McNeil (2000), Jorion (2001)), natomiast prognozy średniej zmienności w okresie pozwalają uwzględnić strukturę czasową zmienności przy wycenie opcji (por. np. Hull (1999)).

Model $GARCH(1,1)$ nie ujmuje długiej pamięci procesu zmienności oraz nie umożliwia modelowania efektu dźwigni.

Czasami efekty te są w szeregu zmienności na tyle silne, iż ich pominięcie prowadzi do znacznego pogorszenia jakości prognoz. Poniżej przedstawione zostaną wzory dla procesu $IGARCH$ umożliwiającego modelowanie długiej pamięci modelu oraz trzech podstawowych, najczęściej wykorzystywanych, modeli umożliwiających modelowanie efektu dźwigni - modelu $GJR-GARCH$, $NGARCH$ oraz $EGARCH$. Modele te wprowadzone zostały w podrozdziale 2.9.

Model *IGARCH(1,1)*:

Prognozę warunkowej wariancji na jeden krok naprzód uzyskuje się na podstawie podstawienia do modelu oszacowanej reszty modelu oraz oszacowanej wartości warunkowej wariancji z chwili t :

$$h_{f,t+1} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\hat{\varepsilon}_t^2 + (1 - \hat{\alpha})\hat{h}_t. \quad (3.25)$$

Prognozy wartości wariancji warunkowej dla kolejnego dnia dane są zależnością:

$$h_{f,t+k} = \hat{\omega} + h_{f,t+k-1}. \quad (3.26)$$

Rozwiązanie danej zależności rekurencyjnej prowadzi do wyniku:

$$h_{f,t+k} = (k - 1)\hat{\omega} + h_{f,t+1}. \quad (3.27)$$

W modelu tym nie istnieje średnia długoterminowa wariancja bezwarunkowa, nie zachodzi więc też efekt powrotu wariancji warunkowej do średniej.

Model *GJR-GARCH(1,1)*:

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla modelu *GJR-GARCH(1,1)*.

$$h_{f,t+1} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\hat{\varepsilon}_t^2 \left((1 + c^2) - 2c \operatorname{sign}(\hat{\varepsilon}_t) \right) + \hat{\beta}\hat{h}_t \quad (3.28)$$

Prognozy wartości wariancji warunkowej dla kolejnego dnia dane są zależnością:

$$h_{f,t+k} = \hat{\omega} + \left((1 + c^2)\hat{\alpha} + \hat{\beta} \right) h_{f,t+k-1}. \quad (3.29)$$

Model *NGARCH(1,1)*:

W modelu tym prognoza warunkowej wariancji na jeden krok naprzód dana jest wzorem:

$$h_{f,t+1} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}\hat{h}_t \left(\frac{\hat{\varepsilon}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} - \kappa \right)^2 + \hat{\beta}\hat{h}_t. \quad (3.30)$$

Prognozy wartości wariancji warunkowej dla kolejnego dnia dane są zależnością:

$$h_{f,t+k} = \hat{\omega} + \left((1 + \kappa^2)\hat{\alpha} + \hat{\beta} \right) h_{f,t+k-1}. \quad (3.31)$$

Różna od zera wartość współczynników odpowiedzialnych za efekt dźwigni powoduje wzrost wartości prognoz dla kolejnych dni w porównaniu do modelu *GARCH(1,1)*.

Także dla modeli *IGARCH*, *GJR-GARCH* oraz *NGARCH* można, poprzez prostą średnią wyznaczyć wartość średniej wariancji w ciągu kolejnych T dni, co pozwala wyznaczyć średni poziom zmienności w sposób analogiczny, jak zostało przedstawione dla modelu *GARCH(1,1)*.

Model *EGARCH(1,1)*:

Zdecydowanie trudniejsze jest wykorzystanie modelu *EGARCH* do prognozowania wariancji warunkowych dla ($k > 1$) oraz średnich wartości wariancji bezwarunkowej w okresie $[t, t + T]$. W pracy Heynena, Kemna i Vorsta przedstawione zostały wzory umożliwiające konstrukcję prognoz warunkowej wariancji dla modelu *EGARCH(1,1)* (por. R. Heynen, Kemna, Vorst (1994)):

$$\begin{aligned}
 h_{f,t+k} &= \hat{h}_t^{2\hat{\beta}_1^k} \exp \left[\hat{\beta}_1^{k-1} A_t \right] \exp \left[\left(\hat{\omega} - \hat{\alpha}_{1b} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \frac{1 - \hat{\beta}_1^k}{1 - \hat{\beta}_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \hat{\alpha}_{1b} \hat{\beta}_1^{k-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{2} \left((\hat{\alpha}_{1a}^2 + \hat{\alpha}_{1b}^2) \frac{1 - \hat{\beta}_1^{2(k-1)}}{1 - \hat{\beta}_1^2} \right) \right] \times \\
 &\quad \times \prod_{m=0}^{\infty} \left[F_m(\hat{\alpha}_{1a}, \hat{\alpha}_{1b}, \hat{\beta}_1) + F_m(-\hat{\alpha}_{1a}, \hat{\alpha}_{1b}, \hat{\beta}_1) \right], \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$A_t = \hat{\alpha}_{1a} \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} + \hat{\alpha}_{1b} \left(\left| \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\sqrt{\hat{h}_t}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right), \tag{3.33}$$

$$F_m(\hat{\alpha}_{1a}, \hat{\alpha}_{1b}, \hat{\beta}_1) = N \left[\hat{\beta}_1^m (\hat{\alpha}_{1a} + \hat{\alpha}_{1b}) \right] \exp \left(\hat{\beta}_1^{2m} \hat{\alpha}_{1a} \hat{\alpha}_{1b} \right), \tag{3.34}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{3.35}$$

Ze względu na specyficzną postać modelu, średnią wartość w okresie $[t, t + T]$, wyznacza się za pomocą średniej geometrycznej:

$$h_{f,t}^{(T)} = \left[\prod_{k=1}^T h_{f,t+k} \right]^{\frac{1}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \ln(h_{f,t+k}) = \exp \left(\frac{D}{T} \right), \tag{3.36}$$

gdzie:

$$D = \ln h_{f,t+1} \sum_{k=2}^T \hat{\beta}_1^{k-1} + \left(\hat{\omega} - \hat{\alpha}_{1b} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \sum_{k=2}^T \frac{1 - \hat{\beta}_1^{k-1}}{1 - \hat{\beta}_1} + \tag{3.37}$$

$$+ \ln h_{f,t+1} + \frac{1}{2} \left(\hat{\alpha}_{1a}^2 + \hat{\alpha}_{1b}^2 \right) \sum_{k=2}^T \frac{1 - \hat{\beta}_1^{2(k-1)}}{1 - \hat{\beta}_1^2} + \tag{3.38}$$

$$+ \sum_{k=2}^T \sum_{m=0}^{k-2} \ln \left[F_m(\hat{\alpha}_{1a}, \hat{\alpha}_{1b}, \hat{\beta}_1) + F_m(-\hat{\alpha}_{1a}, \hat{\alpha}_{1b}, \hat{\beta}_1) \right]. \tag{3.39}$$

Pomimo porównywalnej popularności modelu *EGARCH* i *GJR-GARCH* w zakresie modelowania szeregów stóp zwrotu, model *EGARCH* jest zdecydowanie mniej popularny w obszarze prognozowania zmienności, ze względu na skomplikowaną postać wzorów na prognozy warunkowych wariancji. Wykorzystywany jest, co najwyżej, do dokonywania prognoz na jeden dzień naprzód.

Przedstawione zostały podstawowe informacje o prognozowaniu warunkowej i bezwarunkowej wariancji za pomocą najpopularniejszych modeli klasy *GARCH*. Należy podkreślić, iż odpowiednie wzory, są prawdziwe jedynie w przypadku stałej warunkowej wartości oczekiwanej stóp zwrotu. Jest to przypadek najczęściej zakładany. W przypadku modeli z warunkową wartością oczekiwaną należy uwzględnić jeszcze wzrost bezwarunkowej wariancji wynikający z efektu autokorelacji pomiędzy stopami zwrotu. Postać warunkowego rozkładu stóp zwrotu nie wpływa na procedurę prognozowania zmienności, o ile tylko rozkład ten ma zerową średnią oraz jednostkową wariancję.

3.3. Metody oparte na oczekiwaniach rynku

We wcześniejszym podrozdziale zaprezentowane zostały metody prognozowania zmienności oparte na informacji o historycznych stopach zwrotu. Odmienną koncepcją jest metoda oparta na analizie oczekiwań rynku oraz na znajomości formuły wyceny opcji, w której to formule jednym z parametrów jest właśnie średnia zmienność instrumentu bazowego w terminie do wygaśnięcia opcji. **Jeżeli założy się, że rynek instrumentów pochodnych jest rynkiem efektywnym, czyli w cenie opcji znajdują odzwierciedlenie wszelkie informacje mogące mieć wpływ na cenę tej opcji (w tym również informacja o przyszłej zmienności instrumentu bazowego) oraz, że model teoretyczny prawidłowo wycenia opcję, możliwe staje się wówczas wyznaczenie rynkowego oszacowania zmienności instrumentu bazowego w okresie pozostającym do wygaśnięcia opcji - zmienności implikowanej. Dokonuje się tego poprzez numeryczne wyznaczenie z modeli wyceny parametru zmienności, przy założeniu, że pozostałe parametry modelu są znane, a cena opcji na rynku jest ceną sprawiedliwą, wynikającą z modelu teoretycznego. Podejście to można stosować jedynie w sytuacji,**

gdy rynek instrumentu pochodnego, wystawionego na instrument bazowy, którego zmienność jest prognozowana, jest płynny. Metoda ta zakłada, że uczestnicy rynku (określając cenę opcji) potrafią lepiej prognozować zmienność instrumentu bazowego, niż na podstawie metod opartych jedynie na danych historycznych. Powinno to wynikać choćby z faktu, iż zmiana warunków rynkowych, przekłada się na wzrost lub spadek średniego historycznego poziomu zmienności (który staje się najczęściej prognozą) z opóźnieniem spowodowanym koniecznością dysponowania danymi historycznymi. Uczestnicy rynku mogą natomiast uwzględniać wszystkie informacje, zarówno te historyczne, jak i najświeższe w sposób natychmiastowy.

Poniżej przedstawione zostaną metody prognozowania zmienności na podstawie zmienności implikowanej (*implied volatility*).

W kontekście podziału zmienności na zmienność przyszłą, historyczną oraz prognozę zmienności (por. str. 169), **zmienność implikowana** jest oczywiście prognozą powstającą na podstawie odpowiednio zinterpretowanej i przetworzonej informacji o cenach instrumentów pochodnych wystawionych na dany instrument bazowy. Nie ma jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, czy prognozę zmienności powinno się konstruować poprzez przetworzenie informacji o odchyleniu standardowym, czy wariancji stóp zwrotu. W prognozach opartych na historycznych stopach zwrotu, częściej korzysta się z podejścia opartego na wariancjach stóp zwrotu, natomiast w metodach wykorzystujących zmienność implikowaną, częściej wykorzystuje się odchylenie standardowe. Ze względu na odpowiednio zdefiniowane miary łącznej zmienności implikowanej, w tym podrozdziale zdecydowano się dokonywać prognoz na podstawie parametru zmienności - odchylenia standardowego.

3.3.1. Zmienność implikowana dla pojedynczej opcji

W celu wyznaczenia rynkowego oszacowania przyszłej zmienności, niezbędne jest dysponowanie informacją o cenie opcji, specyfice kontraktu, warunkach rynkowych (poziom stóp procentowych, cena spot). Niezbędna jest także znajomość modelu teoretycznego pozwalającego wyznaczyć wartość opcji. Pomimo istnienia wielu różnych modeli wyceny opcji, wynikających z przyjęcia różnych założeń co do dynamiki cen instrumentu bazowego i zmian poziomu stop procentowych (por. Bates (1996) i (2002), Haug (1998), Wilmott (1999)), Hafner i Herwartz (1999)), najczęściej wykorzystywanymi, przy wyznaczaniu zmienności implikowanej, są modele wywodzące się z modelu Blacka-Scholesa (por. Black, Scholes (1973)).

Zgodnie z modyfikacją uogólnionego modelu Blacka-Scholesa, zaproponowaną przez D. Frencha (uwzględniającą fakt, że zmienność jest zazwyczaj większa w dniach transakcyjnych niż nietransakcyjnych)² (por. French (1984)), wartość europejskiej opcji kupna lub sprzedaży dana jest wzorem:

$$c = Se^{(b-r)T_2}N(d_1) - Xe^{-rT_2}N(d_2), \quad (3.40)$$

$$p = Xe^{-rT_2}N(-d_2) - Se^{(b-r)T_2}N(-d_1), \quad (3.41)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + bT_2 + \frac{\sigma^2}{2}T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + bT_2 - \frac{\sigma^2}{2}T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad (3.42)$$

c - wartość europejskiej opcji kupna,

p - wartość europejskiej opcji sprzedaży,

S - cena spot instrumentu bazowego,

X - cena wykonania opcji,

r - stopa wolna od ryzyka,

q - stopa dywidendy,

$$T_1 = \frac{\text{liczba dni sesyjnych do wygaśnięcia opcji}}{\text{liczba dni sesyjnych w roku}},$$

$$T_2 = \frac{\text{liczba dni kalendarzowych do wygaśnięcia opcji}}{\text{liczba dni kalendarzowych w roku}},$$

σ - odchylenie standardowe stóp zwrotu instrumentu bazowego,

b - stopa *cost-of-carry* (por. str. 43)

$N(\cdot)$ - wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego.

Popularność tego modelu (lub prostszego modelu ze strony 42) spowodowana jest prostą postacią w porównaniu z innymi formułami wyceny oraz faktem, że w modelu tym występuje bezpośrednio parametr utożsamiany ze średnim poziomem zmienności (wyrażonej w skali roku) w okresie do wygaśnięcia opcji. W pozostałych modelach wyceny opcji, ów średni poziom zmienności nie jest dany wprost.

Przy wyznaczaniu rynkowego oszacowania parametru zmienności można posłużyć się zarówno informacją o cenach opcji kupna, jak i sprzedaży. Dalsze wzory zaprezentowane zostaną w wersji dla opcji kupna.

²Przykład analizy efektu dni tygodnia dla indeksu WIG oraz jego wpływu na cenę hipotetycznej opcji wystawionej na ten indeks zaprezentowany został w pracy (Piontek (2000)).

Ponieważ nie jest możliwe analityczne przedstawienie parametru zmienności jako funkcji pozostałych parametrów modelu, $\sigma = f(c, S, X, T, r, b)$, wyznaczenia zmienności dokonuje się metodami numerycznymi.

Najczęściej stosuje się w tym celu rekurencyjny algorytm Newtona-Raphsona:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{c(\sigma_i) - c_m}{\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}} \quad (3.43)$$

gdzie:

σ_i - zmienność otrzymana w i -tym kroku algorytmu,

c_m - rynkowa cena opcji,

$c(\sigma_i)$ - cena wyznaczona z modelu (3.40) dla zmienności σ_i ,

$\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}$ - parametr *vega*.

Procedurę powtarza się, aż do spełnienia warunku:

$$|c_m - c(\sigma_{i+1})| \leq \varepsilon, \quad (3.44)$$

gdzie ε to założony poziom dokładności oszacowania parametru zmienności.

Wartość startową algorytmu, zapewniającą zbieżność procedury zaproponowali Manaster i Koehler (por. Manaster, Koehler (1982)). Poniżej przedstawiona została wersja dla modelu danego wzorami (3.40)-(3.42).

$$\sigma = \left[\left| \ln \frac{S}{X} + rT_2 \right| \frac{2}{T_1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

Korzystając z algorytmu Newtona-Raphsona niezbędna jest znajomość cząstkowej pochodnej ceny opcji względem parametru zmienności (współczynnika *vega*). W wielu przypadkach (np. dla niektórych opcji egzotycznych, opcji amerykańskich) współczynnik *vega* nie jest znany w postaci analitycznej. Parametr zmienności implikowanej wyznacza się wówczas wykorzystując metodę rekurencyjnej interpolacji liniowej (*The Bisection Method*) (por. Haug (1989)):

$$\sigma_{i+1} = \sigma_L + (c_m - c_L) \frac{\sigma_H - \sigma_L}{c_H - c_L}, \quad (3.46)$$

$$c_L < c_m < c_H \quad \text{oraz} \quad \sigma_L < \sigma_i < \sigma_H,$$

gdzie:

- c_L – cena opcji wynikająca ze zmienności σ_L ,
- c_H – cena opcji wynikająca ze zmienności σ_H ,
- c_m – rynkowa cena opcji (dla poszukiwanej wartości σ_i).

W kolejnym kroku, o ile nie jest spełniony warunek (3.44), dokonywane jest odpowiednie podstawienie:

$$\begin{cases} \sigma_L = \sigma_{i+1} & \text{gdy } c(\sigma_{i+1}) < c_m \\ \sigma_H = \sigma_{i+1} & \text{gdy } c(\sigma_{i+1}) > c_m \end{cases} \quad (3.47)$$

Zaproponowane zostały również przybliżone metody wyznaczania parametru σ , nie wykorzystujące rozwiązań rekurencyjnych. Zaprezentowane zostaną one poniżej (w wersji dla „klasycznego” modelu Blacka-Scholesa nie uwzględniającego odmiennego ujmowania dni sesyjnych i niesesyjnych). W poniższych wzorach T oznacza więc czas w latach do wygaśnięcia opcji.

Brenner i Subrahmanyam przedstawili w 1988 roku wzór na zmienność implikowaną wyznaczaną na podstawie ceny europejskiej opcji kupna, gdy cena akcji równa jest zdyskontowanej cenie wykonania opcji (por. Brenner, Subrahmanyam (1988)). Odpowiada to opcji będącej *forward at-the-money*³.

$$\sigma \approx \frac{c_m \sqrt{2\pi}}{S\sqrt{T}} \quad (3.48)$$

Corrado i Miller przedstawili w 1996 roku wzór na przybliżoną wartość zmienności implikowanej dla opcji niekoniecznie będącej *forward at-the-money* (por. Corrado, Miller (1996)).

$$\begin{aligned} \sigma \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{T}(S + Xe^{-rT})} & \left\{ c_m - \frac{S - Xe^{-rT}}{2} + \right. \\ & \left. + \left[\left(c_m - \frac{S - Xe^{-rT}}{2} \right)^2 - \frac{(S - Xe^{-rT})^2}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

³Opcja jest *forward-at-the-money*, gdy spełniona jest zależność $S = Xe^{-rT}$.

Obydwa wzory prowadzą do uzyskania jedynie przybliżonych wartości zmienności implikowanej. Wzoru (3.48) można używać jedynie w odniesieniu do opcji *at-the-money*. W przypadku odstąpienia od tego założenia, wzór ten prowadzi do uzyskania błędnych wyników. Nietrudno wykazać, iż dla opcji *at-the-money*, dla której zachodzi warunek $S = Xe^{-rT}$, wzór Corrado i Millera sprowadza się do wzoru Brennera i Subrahmanyamy. Wzór Corrado i Millera prowadzi do uzyskania satysfakcjonujących oszacowań zmienności implikowanej dla typowego, obserwowanego w praktyce, przedziału współczynnika *moneyness* (por. przypis na str. 192). Wobec dostępności komputerów oraz specjalistycznego oprogramowania, znaczenie powyższych wzorów uległo zmniejszeniu.

Jak już zostało wspomniane, współcześnie wykorzystuje się jednak metody rekurencyjne, z których najpopularniejszą stała się metoda Newtona-Raphsona.

3.3.2. Łączna zmienność implikowana dla klasy opcji

Zdarza się, że w ramach jednego rynku, lub różnych rynków, notowane są opcje o różnych terminach wygaśnięcia i/lub różnych cenach wykonania wystawione na ten sam instrument. Wyznaczenie zmienności implikowanych dla tych opcji może prowadzić do otrzymania różniących się wartości zmienności będących oszacowaniem tej samej przecież przyszłej zmienności.

Związane jest to z:

- obciążeniami modelu teoretycznego, u podstaw którego znajdują się niespełnione w rzeczywistości założenia o tym, że procesem ceny jest geometryczny ruch Browna o stałych w czasie parametrach, o stałości stóp procentowych, doskonałej podzielności instrumentu bazowego, możliwości krótkiej sprzedaży oraz ciągłego utrzymywania pozycji wolnej od ryzyka.

Powoduje to występowanie efektu zwanego „uśmiechem zmienności” oraz występowanie „struktury czasowej zmienności implikowanej”, czyli zależności zmienności implikowanej, uzyskiwanej z modelu Blacka-Scholesa, od ceny wykonania oraz terminu do wykupu. Efekt „uśmiechu zmienności” związany jest z faktem, że rozkład przyszłych cen odbiega od rozkładu log-normalnego, czyli, że rozkład stóp zwrotu odbiega od rozkładu normalnego. W przypadku opcji wystawionych na waluty i towary obserwuje się zazwyczaj symetryczny „uśmiech

zmienności”⁴, co związane jest z faktem, że co prawda rozkład stóp zwrotu posiada grube ogony, ale jest rozkładem symetrycznym. W przypadku opcji wystawionych na akcje oraz indeksy akcji, obserwuje się najczęściej asymetryczny „grymas zmienności”⁵, co związane jest z efektem dźwigni, wprowadzającym skośność do rozkładu stóp zwrotu oraz z lękiem przed kryzysami finansowymi („*catastrophobia*”). Efekt „struktury czasowej zmienności” związany jest natomiast z własnością powrotu zmienności do średniej. Jeśli zmiennosc w chwili t jest niższa (wyższa) niż długoterminowa średnia, zmiennosc implikowana uzykiwana z cen instrumentów o coraz dłuższym terminie do wygaśnięcia rośnie (maleje).

- błędami wyceny związanymi z brakiem płynności rynku, błędnym oszacowaniem pozostałych parametrów modelu, na przykład z istnieniem *spreadu bid-ask* dla rynków pozagiełdowych, czy z faktu, że ceny opcji i instrumentów bazowych mogą pochodzić z różnych punktów czasowych.

Więcej na ten temat znaleźć można w pracach Natenberga (por. Natenberg (1994)), Hulla (por. Hull (1997)), Dumasa, Fleminga, Whaley’a (por. Dumas, Fleming, Whaley (1998)), Connolly’ego (por. Connolly (1999)), czy Rosenberga (Rosenberg (2000)).

Wobec możliwości otrzymania różnych oszacowań parametru zmiennosci implikowanej, niezbędne stało się podjęcie próby połączenia (uśrednienia) informacji niesionej przez poszczególne wartości w jeden łączny parametr zmiennosci implikowanej ($\hat{\sigma}$).

Często procedurę wyznaczania złożonego parametru zmiennosci implikowanej poprzedza odrzucenie z analizowanego zbioru opcji, dla których model Blacka-Scholesa cechuje się dużymi obciążeniami.

Schmalensee i Trippi (1978) proponowali odrzucenie z analizowanego zbioru opcji, dla których (por. Schmalensee, Trippi (1978)):

- premia opcyjna jest niższa niż zadana wartość lub premia jest mniejsza niż zadany procent ceny instrumentu bazowego (eliminuje się opcje, dla których koszty

⁴Opcje *in-the-money* oraz *out-of-the-money* cechują się wyższą zmiennością niż opcje *at-the-money*.

⁵Zmiennosc implikowana dla opcji kupna maleje wraz ze wzrostem ceny wykonania lub ma kształt zniekształconej litery „u”, w którym ramię opisujące opcje *out-of-the-money* jest niżej niż ramię dla opcji *in-the-money*.

- transakcji są zbyt wysokie oraz opcje, które są *deep-out-of-the-money*),
- premia jest mniejsza niż procentowo zadana różnica między ceną akcji a ceną wykonania przy warunku, że cena wykonania jest mniejsza od ceny instrumentu bazowego (eliminuje się opcje głęboko *in-the-money*, szczególnie te o krótkim okresie do wykupu),
 - czas do wygaśnięcia jest krótszy od założonej granicy.

Estymatory zmienności łącznej możemy podzielić na takie, które (por. Hamid (1998)):

- uśredniają zmienności implikowane wyznaczone na podstawie transakcji dokonanych w dniu konstrukcji prognozy (*cross-sectional data averaging*),
- uśredniają zmienności wyznaczone na podstawie transakcji dokonanych w dniu konstrukcji prognozy oraz w dniach wcześniejszych (*intertemporal averaging*).
- łączą obie techniki.

Procedury wyznaczania łącznego parametru zmienności implikowanej obejmują więc wyznaczenie odpowiednio ważonej średniej dla zmienności implikowanych otrzymanych dla opcji pochodzących z tej samej klasy.

W zależności od autora za klasę opcji uważa się:

- wszystkie opcje wystawione na ten sam instrument bazowy (por. Latane, Rendleman (1976)),
- wszystkie dostępne do analizy opcje wystawione na ten sam instrument bazowy oraz o tym samym terminie wygaśnięcia (por. Beckers (1981)).

Zakłada się, że dla każdego instrumentu bazowego w momencie t , istnieje prawdziwa wartość zmienności σ_t , która opisuje oczekiwaną przyszłą zmienność. Liczbę opcji w danej klasie w chwili t oznacza się jako N_t , a zmienności implikowane dla poszczególnych opcji w klasie jako σ_{it} ($i = 1, \dots, N_t$).

Feinstein wykazał, iż tylko dla opcji *at-the-money* uzyskuje się, z modelu Blacka-Scholesa, zmienności implikowane będące nieobciążonymi prognozami przyszłej zmienności, co związane jest z występowaniem obciążenia modelu - efektu „uśmiechu zmienności” (por. Feinstein (1988)).

Uwzględnienie tylko opcji *at-the-money* eliminuje co prawda błędy spowodowane obciążeniem modelu, ale powoduje wzrost średniego błędu spowodowanego możliwą

nieprawidłową wyceną poszczególnych instrumentów. Zmienność implikowana wyznaczana jedynie z tak ograniczonego zbioru opcji, jest prognozą nieobciążoną, lecz o dużym potencjalnym błędzie.

Spowodowało to konieczność włączenia do konstrukcji prognozy także informacji z cen opcji nie będących *at-the-money*.

Zaproponowane przez różnych autorów estymatory łącznej zmienności implikowanej $\hat{\sigma}_t$, kładą w różny sposób nacisk na wartości zmienności implikowanych otrzymanych dla opcji o różnym współczynniku *moneyness*⁶.

- R. Schmalensee i R. Trippi zaproponowali, aby wszystkie zmienności implikowane traktować tak samo i ich łączny estymator ma postać średniej ważonej jednakowymi wagami (por. Schmalensee, Trippi (1978))

$$\hat{\sigma}_t = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \sigma_{it} \quad (3.51)$$

Tak zdefiniowany estymator zmniejsza co prawda błąd spowodowany możliwymi nieprawidłowymi wycenami poszczególnych instrumentów, lecz nie zmniejsza błędu wynikającego z obciążenia modelu.

Najczęstszym rozwiązaniem w zakresie zmniejszania błędu estymatora łącznej zmienności jest stosowanie systemu wag opartego na współczynniku *vega* dla poszczególnych opcji.

Z wzoru Blacka-Scholesa można pokazać, że współczynnik *vega* osiąga maksimum, gdy spełniona jest zależność:

$$S = X e^{-T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}, \quad (3.52)$$

⁶Współczynnik *moneyness* dla opcji kupna zdefiniowany został jako:

$$m = \frac{S}{X e^{-rT}}. \quad (3.50)$$

Współczynnik *moneyness* dla opcji sprzedaży jest odwrotnością współczynnika dla opcji kupna. Współczynnik ten uwzględnia wartość pieniądza w czasie i prowadzi do wyróżnienia tzw. opcji *forward-in-the-money (ITM)*, dla których $m > 1$, opcji *forward-at-the-money (ATM)*, dla których $m = 1$ oraz opcji *forward-out-of-the-money (OTM)*, dla których $m < 1$. Czasami definiuje się współczynnik *moneyness* jako $m' = \ln(m)$. W niniejszej pracy przyjęta zostanie jednak definicja dana wzorem (3.50).

co w przybliżeniu odpowiada warunkowi, by opcja była *forward-at-the-money*. Współczynnik *vega* maleje symetrycznie wraz z tym, jak opcja staje się *ITM* lub *OTM*. Pozwala to zmniejszyć wpływ błędu spowodowanego niedoskonałością modelu Blacka-Scholesa - zmniejszyć wpływ efektu „uśmiechu zmienności” poprzez uwypuklenie informacji zawartych w opcjach *ATM*. Zastosowanie modelu wag opartego na współczynniku *vega* ma także drugą zaletę. Zgodnie z definicją, współczynnik *vega* określa wrażliwość ceny opcji na zmianę współczynnika zmienności. Wysoki współczynnik *vega* to jednak **niska wrażliwość** zmienności implikowanej na zmianę ceny. Powoduje to, że w przypadku błędów wyceny, znacznie mniej wpływają one na oszacowanie parametru zmienności implikowanej dla opcji *ATM*, niż dla opcji *ITM* lub *OTM*.

Wagi proporcjonalne do współczynnika *vega* poszczególnych opcji zostały zaproponowane przez H. Latané i J. Rendlemana oraz S. Beckersa.

• Latané i Rendleman zaproponowali następujący wzór do wyznaczania estymatora łącznego (por. Latané, Rendleman (1976)):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\left(\sum_{j=1}^{N_t} \sigma_{jt}^2 w_{jt}^2 \right)^{0.5}}{\sum_{j=1}^{N_t} w_{jt}}, \quad (3.53)$$

gdzie:

w_{it} – pochodna cząstkowa ceny opcji i na instrument bazowy w momencie t względem odchylenia standardowego, wyznaczona z modelu teoretycznego (współczynnik *vega*).

Powyższa „średnia ważona” nie jest prawdziwą średnią ważoną, ponieważ suma wag „uśredniających” parametr zmienności jest mniejsza niż 1. Z tego względu estymator ten jest obciążony i zaniża wartość zmienności implikowanej. Co więcej obciążenie zwiększa się wraz ze wzrostem wielkości próby nawet wtedy, gdy wszystkie zaobserwowane zmienności implikowane dla pojedynczych opcji są takie same. Zaproponowana została więc modyfikacja powyższego wzoru, która pozbawiona już jest opisanej wady:

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \sigma_{jt} w_{jt}}{\sum_{j=1}^{N_t} w_{jt}}. \quad (3.54)$$

Oszacowanie dane wzorem (3.54) nadaje większe wagi opcjom *at-the-money* niż wzór (3.53). Opcje *in-the-money* oraz *out-of-the-money* traktowane są tak samo.

- Beckers zaproponował procedurę wyznaczania łącznej zmienności implikowanej, która koncentruje się przede wszystkim na zmiennościach implikowanych na podstawie opcji *forward-at-the-money*. Wartość łącznej zmienności uzyskuje się poprzez minimalizację funkcji (por. Beckers (1981)):

$$f(\hat{\sigma}_t) = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} w_{it} [c_{mit} - c_{it}(\hat{\sigma}_t)]^2}{\sum_{i=1}^{N_t} w_{it}}. \quad (3.55)$$

Procedura ta minimalizuje ważoną sumę kwadratów odchyłeń cen rynkowych oraz cen wynikających z modelu teoretycznego przy założonym poziomie zmienności.

- Podobne rozwiązanie zaproponował w 1982 roku Whaley (por. Whaley (1982)). Oszacowanie łącznego współczynnika zmienności uzyskuje się minimalizując funkcję:

$$f(\hat{\sigma}_t) = \sum_{i=1}^{N_t} (c_{mit} - c_{it}(\hat{\sigma}_t))^2. \quad (3.56)$$

- Chiras i Manaster zaproponowali średnią ważoną względem współczynnika elastyczności ceny opcji i odchylenia standardowego (por. Chiras, Manaster (1978)):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} \sigma_{jt} \frac{\partial c_{jt}}{\partial \sigma_{jt}} \frac{\sigma_{jt}}{c_{jt}}}{\sum_{i=1}^{N_t} \frac{\partial c_{jt}}{\partial \sigma_{jt}} \frac{\sigma_{jt}}{c_{jt}}}, \quad (3.57)$$

gdzie:

$\frac{\partial c_{it}}{\partial \sigma_{it}} \frac{\sigma_{it}}{c_{it}}$ – elastyczność ceny względem odchylenia standardowego;
informuje ile procent zmieni się wartość opcji, jeżeli zmienność zmieni się o jeden procent swej wartości.

Zaproponowane powyżej metody wyznaczania łącznej zmienności implikowanej, uwzględniają z różną wagą zmienności implikowane otrzymane dla opcji o różnej

3.3. Metody oparte na oczekiwaniach rynku

wrażliwości na zmiany odchylenia standardowego stóp zwrotu. W tabeli 3.2 przedstawiono porównanie proponowanych metod.

Zaprezentowane metody nie wyczerpują wszystkich propozycji obliczania łącznego parametru zmienności implikowanej, w ramach uśredniania na podstawie informacji o cenach pochodzących z jednego dnia, niemniej są metodami najczęściej proponowanymi.

3.3. Metody oparte na oczekiwaniach rynku

Tabela 3.2: Porównanie estymatorów zmienności łącznej.

Estymator	Własności
Schmalensee, Trippi	równe wagi dla opcji <i>ATM</i> i pozostałych, znajduje zastosowanie dla zbioru opcji, z którego wstępnie zostały usunięte instrumenty mogące być źródłem błędu (np. <i>deep-in-the-money</i> lub <i>deep-out-of-the-money</i>)
Latane, Rendleman	wagi nie sumują się do jedności, jest to powodem błędu podczas estymacji parametru łącznej zmienności, estymator ten jest praktycznie nie wykorzystywany
zmodyfikowany Latane, Rendleman	większe wagi nadaje się opcjom będącym prawie <i>ATM</i> , wagi dla opcji <i>ITM</i> oraz <i>OTM</i> są symetryczne $\hat{\sigma}_t = \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \sigma_{jt} w_{jt}}{\sum_{j=1}^{N_t} w_{jt}} \quad (3.58)$
Whaley	silniejsze uwzględnienie opcji prawie <i>ATM</i> niż dla zmodyfikowanej procedury Latane i Rendlemana $\hat{\sigma}_t \approx \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \sigma_{jt} w_{jt}^2}{\sum_{j=1}^{N_t} w_{jt}^2} \quad (3.59)$
Beckers	jeszcze większe wagi nadane opcjom bliskim <i>ATM</i> $\hat{\sigma}_t \approx \frac{\sum_{j=1}^{N_t} \sigma_{jt} w_{jt}^3}{\sum_{j=1}^{N_t} w_{jt}^3} \quad (3.60)$
Chiras, Manaster	średnia ważona jest współczynnikami elastyczności zmiany ceny opcji względem zmian zmienności instrumentu bazowego, procedura nadaje większe wagi zmienności implikowanej wyznaczonej z opcji <i>OTM</i> , przez co jest rzadziej stosowana

Źródło: opracowanie własne.

Do tej pory przedstawione zostały techniki prognoz zmienności na podstawie informacji uzyskiwanych jedynie z cen opcji z dnia prognozy.

Feinstein zaproponował, aby korzystać jedynie z informacji zawartych w cenach opcji *ATM*. W celu ograniczenia błędu wynikającego z możliwych błędów wyceny, które mogą silnie wpływać na prognozę w przypadku niewielkiej liczby transakcji opcjami *ATM*, sugerował on wykorzystanie średniej wartości zmienności implikowanej dla opcji *ATM* z dnia prognozy oraz z kilku dni poprzedzających.

Uśrednianie opóźnionych w czasie zmienności implikowanych prowadzi do otrzymania oszacowania parametru przyszłej zmienności, który jest „informacyjnie nieefektywny”, gdyż zmienności implikowane wyznaczone na przykład na podstawie cen opcji sprzed 3 dni, nie zawierają informacji, które napłynęły od tamtego czasu na rynek. Feinstein argumentował jednak, że korzyści wynikające z uwzględnienia informacji zawartych jedynie w cenach opcji *ATM*, dla których zmienność implikowana jest nieobciążoną prognozą, przewyższają potencjalny błąd wynikający z „nieefektywności informacyjnej”, szczególnie dla prognoz długoterminowych. W oryginalnej procedurze z 1988 roku, Feinstein proponował uśredniać zmienność implikowaną z 5 ostatnich dni z cen opcji *ATM* (por. Feinstein (1988)).

Hamid zaproponował natomiast, by szczególnie dla opcji o krótkim terminie do wygaśnięcia posługiwać się jedynie informacją z dwóch lub trzech dni, co powinno zwiększyć „efektywność informacyjną”. Dodatkowo zaproponował on przyjęcie bardzo prostego systemu wag, które zwiększyłyby wagę informacji najświeższych. W przypadku wersji procedury polegającej na uśrednianiu informacji z 3 dni, proponowane wagi wynosiły 0,5; 0,3 i 0,2 (por. Hamid (1998)).

Na zakończenie warto zaznaczyć, iż obydwa zaprezentowane podejścia można łączyć, wyznaczając najpierw łączne parametry zmienności opcji różniących się ceną wykonania dla poszczególnych dni, a następnie uśredniając je jeszcze dla dwóch, trzech, czy pięciu ostatnich dni (por. Hamid (1998)).

Z zagadnieniem zmienności implikowanej związane są też takie pojęcia jak **funkcje zmienności implikowanej** (por. Dumas, Fleming, Whaley (1998), Pena, Rubio, Serna (1999), Rosenberg (2000)) oraz **drzewa zmienności implikowanej** (por. Rubinstein (1994), Jarrow (1999)). Zagadnienia te nie staną się jednak tematem rozważań, gdyż obie te procedury służą bardziej wycenie opcji na podstawie modelu, który dopasowuje się do aktualnie obserwowanej na rynku płaszczyzny zmienności, aniżeli do prognozowania współczynnika zmienności w przyszłym okresie.

3.4. Oceny prognoz zmienności

Zanim w procesie zarządzania ryzykiem wykorzystane zostaną prognozy zmienności, należy na podstawie próby testowej ocenić trafność, a więc przydatność prognoz. Prognozy podlegają ocenie zarówno w kontekście odpowiedzi na pytanie jak bardzo średnio prognozy różnią się od obserwowanych w przyszłości rzeczywistych realizacji oraz w kontekście efektywności prognoz, czy rzeczywiście istnieje związek pomiędzy wartościami prognoz oraz zrealizowanymi wartościami zmiennej prognozowanej.

W przypadku prognoz zmienności ocenie podlegać mogą prognozy warunkowej wariancji z kolejnego dnia (na podstawie modeli klasy GARCH) lub średniego poziomu wariancji bezwarunkowej z takiego okresu (na podstawie modeli z podrozdziału 3.2.1. oraz modeli GARCH).

Oceny błędów statystycznych

Trafność prognoz określa się za pomocą błędów *ex post*, po upływie czasu, na który prognoza była wyznaczana. Błędy *ex post* można wyznaczać dla pojedynczego momentu, bądź w przypadku dysponowania informacją o wartościach prognoz z większej ilości wcześniejszych momentów, zbiorczo dla całego takiego **przedziału weryfikacji prognoz**, poprzez odpowiednie uśrednienie błędów dla każdego z momentów. W dalszej części pracy zakłada się, że prognosta dysponuje przedziałem weryfikacji prognoz zawierającym n prognoz oraz wartości zrealizowanej zmienności. Odpowiednie miary błędów *ex post* mogą zostać wykorzystane zarówno podczas analizy błędu prognozy wewnątrz próby (dla próbki uczącej), który może posłużyć do kalibracji modelu prognozy, jak i do analizy błędu prognozy poza próbą (próbka testowa).

Miary błędów prognozy *ex post* dzielimy na:

- **miary symetryczne**, które w taki sam sposób uwzględniają przeszacowanie i niedoszacowanie prognozy zmienności,
- **miary niesymetryczne**, które w odmienny sposób uwzględniają przeszacowanie i niedoszacowanie prognozy zmienności w poszczególnych podokresach.

W poniższych wzorach, w celu poprawienia czytelności, pominięte zostaną podawane w nawiasach oznaczenia technik prognozy.

Jako przykładowe miary symetryczne można wymienić (por. Brailsford, Faff, (1996), Balaban (1999), Poon, Granger (2001)):⁷

- pierwiastek średniej kwadratów błędów (*Root Mean Squared Error-RMSE*):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (s_{f,m} - s_{h,m})^2}, \quad (3.61)$$

- średni błąd bezwzględny (*Mean Absolute Error-MAE*)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n |s_{f,m} - s_{h,m}|, \quad (3.62)$$

- mediana błędów bezwzględnych (*Median Absolute Error-MedAE*)

$$MedAE = Median(|s_{f,m} - s_{h,m}|). \quad (3.63)$$

Powyższe miary błędów *ex post* z różną siłą eksponują błędy duże, szczególnie nietrafione pojedyncze prognozy. Miara *RMSE* uwzględnia takie błędy najsilniej. W mniejszym stopniu poprzez zastosowanie wartości bezwzględnej, szczególnie nietrafione prognozy uwzględnia miara *MAE*. Na nietypowo duże, jak i nietypowo małe błędy prognoz, niewrażliwa jest miara *MedAE* oparta na medianie błędów bezwzględnych.

Innymi często wykorzystywanymi miarami błędów *ex post* są średni bezwzględny błąd procentowy oraz współczynnik Theila.

Średni bezwzględny błąd procentowy (*Mean Absolute Percentage Error- MAPE*) dany wzorem:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \left| \frac{s_{f,m}}{s_{h,m}} - 1 \right|. \quad (3.64)$$

mierzy o ile procent średnio prognoza różniła się od wartości zrealizowanej. Jest to miara umożliwiająca porównanie jakości prognoz dla różnych szeregów danych, różniących się poziomem prognozowanego zjawiska.

⁷W zależności od podejścia, czy prognozowane jest odchylenie standardowe stóp zwrotu, czy wariancja stóp zwrotu, we wszystkich wzorach przedstawianych w tym podrozdziale odpowiednie miary liczone mogą być bądź to w oparciu o prognozę i zrealizowane odchylenie standardowe, bądź w oparciu o zrealizowaną i prognozowaną wariancję. Zgodnie z konwencją przyjętą w tej pracy wszystkie wzory przedstawione zostały w odniesieniu do odchylenia standardowego.

Współczynnik Theila (por. Cieślak (2000), Poon, Granger (2001)) dany jest natomiast wzorem:

$$Theil-U = \frac{\sum_{m=1}^n (s_{f,m} - s_{h,m})^2}{\sum_{m=1}^n (s_{h,m-1} - s_{h,m})^2}. \quad (3.65)$$

W mierze tej błąd prognozy standaryzowany jest w stosunku do błędu prognozy naiwnej opartej na błędzeniu losowym. Dla modelu błędzenia losowego (RW), współczynnik Theila wynosi 1. Współczynnik Theila określa efektywność stosowania bardziej skomplikowanych technik prognozowania w stosunku do techniki najprostszej.

W dalszej części pracy wykorzystane zostaną jednak najpopularniejsze miary symetryczne błędu prognozy *ex post*, czyli *RMSE* oraz *MAE*.

Powyższe miary błędu prognozy z taką samą siłą uwzględniały niedoszacowania, jak i przeszacowania prognoz zmienności. Ponieważ w wielu przypadkach inwestor nie traktuje w taki sam sposób błędu prognozy polegającego na takim samym, co do wartości, niedoszacowaniu oraz przeszacowaniu prognozy zmienności, zaproponowano miary asymetryczne błędu *ex post*. Najczęściej stosowanymi miarami są asymetrycznymi są (por. Pagan, Schwert (1990), Brailsford, Faff (1996), Balaban (1999)):

- średni błąd mieszany niedoszacowania (*Mean Mixed Error of Under-prediction - MMEU*):

$$MMEU = \frac{1}{n} \left[\sum_{m=1}^n |s_{f,m} - s_{h,m}| K_m + \sum_{m=1}^n \sqrt{|s_{f,m} - s_{h,m}| L_m} \right], \quad (3.66)$$

- średni błąd mieszany przeszacowania (*Mean Mixed Error of Over-prediction - MMEO*):

$$MMEO = \frac{1}{n} \left[\sum_{m=1}^n \sqrt{|s_{f,m} - s_{h,m}| K_m} + \sum_{m=1}^n |s_{f,m} - s_{h,m}| L_m \right], \quad (3.67)$$

gdzie:

$$K_m = \begin{cases} 1; & \text{dla } s_{f,m} > s_{h,m} \\ 0; & \text{dla } s_{f,m} \leq s_{h,m} \end{cases}, \quad L_m = \begin{cases} 1; & \text{dla } s_{f,m} \leq s_{h,m} \\ 0; & \text{dla } s_{f,m} > s_{h,m} \end{cases}. \quad (3.68)$$

Miara MMEU uwzględnia silniej błędy niedoszacowania zmienności, a miara MMEO - błędy przeszacowania. Miary te są czułe zarówno na liczbę przypadków przeszacowania lub niedoszacowania, jak i na wielkość tego błędu.

W obydwu powyższych wzorach, siła z jaką uwzględniane są błędy przeszacowania i niedoszacowania względem siebie jest stała i zależy jedynie od wielkości błędu prognozy. Większą lub mniejszą wagę tym samym co do wartości błędom nadawać można wyznaczając błąd prognozy w oparciu o tak zwaną funkcję LINEX (por. Ponn, Granger (2001)) daną wzorem:

$$LINEX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ \exp[-a(s_{f,m} - s_{h,m})] + a(s_{f,m} - s_{h,m}) - 1 \}. \quad (3.69)$$

Jeśli parametr $a > 0$, to funkcja jest w przybliżeniu liniowa dla błędu przeszacowania oraz w przybliżeniu wykładnicza dla błędu niedoszacowania. W tym przypadku błędy niedoszacowania zmienności uwzględniane są więc z większą wagą, niż błędy przeszacowania. Analogicznie, gdy $a < 0$, to błędy niedoszacowania zmienności uwzględniane są z większą wagą niż błędy przeszacowania. Wartość bezwzględna parametru a decyduje o wadze odpowiednio błędu przeszacowania lub niedoszacowania i jest przyjmowana subiektywnie.

W dalszej części pracy wykorzystywane będą do testowania błędów przeszacowania i niedoszacowania średnie błędy mieszane.

Oceny efektywności prognoz

Osobnym podejściem do oceny jakości prognoz jest ocena obciążenia oraz efektywności prognoz.

Podejście to spopularyzowane zostało w kontekście prognoz zmienności przez Faira i Schillera. Idea polega na wyznaczeniu regresji liniowej:

$$s_{h,m} = \alpha + \beta s_{f,m}(\cdot) + u_m \quad (3.70)$$

W przypadku doskonałych, nieobciążonych prognoz, wyraz wolny w równaniu regresji powinien mieć wartość zero, natomiast wyraz stojący przy prognozie wartość jeden.

Efektywność prognoz, w znaczeniu ile procent zmian zmienności realizowanej w kolejnych podokresach przewidywanych i tłumaczonych jest przez prognozy, określa współczynnik R^2 analizowanej regresji.

Rozdział 4.

Modele zmienności w wybranych zagadnieniach finansowych - badania empiryczne

W rozdziale 4 zaprezentowane zostaną wyniki badań nad szeregami stóp zwrotu, wykorzystujące modele oraz techniki opisane we wcześniejszych rozdziałach.

Rozdział ten podzielony został na cztery części.

W części pierwszej przedstawione zostaną wyniki dopasowania różnych modeli stóp zwrotu z warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją do szeregów stóp zwrotu z indeksu WIG, kursu dolara oraz ceny miedzi. Celem badania jest sprawdzenie, który z modeli najlepiej dopasowuje się do danych empirycznych. Informacja taka może być wykorzystana w procesie zarządzania ryzykiem, co zostanie zaprezentowane w dalszej części rozdziału podczas prognozowania zmienności, wyznaczania wartości VaR , czy wyceny opcji europejskich.

W drugiej części rozdziału zaprezentowane zostaną techniki prognozowania zmienności na podstawie zarówno technik opartych na analizie szeregów czasowych, jak i na oczekiwaniach rynku. Dla obu grup technik, prognozowana będzie zmienność stóp zwrotu w kolejnych miesiącach kalendarzowych. W badaniach opartych na analizie szeregów czasowych wykorzystane zostaną zarówno techniki z stałym parametrem zmienności w podokresach, jak i modele klasy $GARCH$. Badaniami objęte zostaną szeregi stóp zwrotu z indeksu WIG, kursu dolara oraz ceny miedzi. W tej części zaprezentowany zostanie także przykład analizy prognoz zmienności w oparciu o zmienność

implikowaną. Ze względu na trudności ze zgromadzeniem kompletnych i rzetelnych danych niezbędnych w badaniu, analiza obejmować będzie jedynie rynek warrantów na WIG20, które były najbardziej płynnymi instrumentami pochodnymi umożliwiającymi wyznaczenie zmienności implikowanej, notowanymi w okresie badania na GPW w Warszawie. Z powodu trudności ze zgromadzeniem informacji o instrumentach z rynku pozagiełdowego, zrezygnowano z badań nad możliwością prognozowania w ten sposób zmienności kursu dolara. Brak dostępu do szczegółowych danych o zagranicznym rynku opcji na cenę miedzi, zdecydował o rezygnacji także z badań nad zmiennością implikowaną dla cen miedzi. Prezentowany przykład dla indeksu WIG20 ma za zadanie przybliżyć problematykę prognoz zmienności w oparciu o oczekiwania rynku.

Celem badań nad możliwością prognozowania zmienności jest odpowiedź na pytanie, która z prezentowanych technik, do tej pory sprawdzająca się najlepiej i powinna być wykorzystywana.

Trzecia i czwarta część poświęcona zostanie przykładom wykorzystania modeli z warunkową wartością oczekiwaną oraz z warunkową wariancją w procesie pomiaru ryzyka rynkowego metodą *VaR* oraz w wycenie europejskiej opcji kupna.

Wykazana zostanie przydatność modeli omawianych w rozdziale drugim przy pomiarze jednodniowej wartości zagrożonej dla indeksu WIG. Uwzględnienie efektu autokorelacji oraz efektu *GARCH* prowadzi do znacznej poprawy jakości modelu *VaR*. Wykazane zostanie ponadto, iż pomiar *VaR* dla poziomu tolerancji 0,01 wymaga zastosowania modeli o warunkowych rozkładach z grubymi ogonami.

W ostatniej części rozdziału przedstawiony zostanie model wyceny europejskiej opcji kupna na instrument bazowy, którego szereg stóp zwrotu charakteryzuje się autokorelacją, efektem *GARCH* oraz efektem dźwigni. Nieuwzględnienie tych efektów prowadzi, w przypadku stosowania modelu Blacka-Scholesa, do błędów wyceny. W oparciu o model *AR-GARCH*, wyceniona zostanie hipotetyczna opcja na jednostkę indeksu WIG. Własności modelu zaprezentowane zostaną poprzez wyznaczenie płaszczyzny zmienności implikowanej (na podstawie modelu Blacka-Scholesa) z cen uzyskanych z modelu *AR-GARCH* dla różnych terminów do wygaśnięcia oraz dla różnych cen wykonania. Uzyskanie typowych, obserwowanych na rynkach, efektów „uśmiechu zmienności” oraz struktur czasowych zmienności prowadzi do wniosku, iż model uwzględniający efekt autokorelacji oraz *GARCH* umożliwia uwzględnienie własności obserwowanych na rynkach. Niestety zbyt niska płynność, wpływająca na błędy wy-

ceny warrantów w warunkach polskich, uniemożliwia odniesienie uzyskiwanych z modelu cen do cen rzeczywistych z rynku. Zaprezentowany przykład pozostaje więc w sferze przykładu ilustracyjnego.

4.1. Modelowanie zmienności

Celem podrozdziału jest przedstawienie wyników modelowania rzeczywistych szeregów czasowych. Analizie poddane zostaną **dziennie proste¹ stopy zwrotu** z:

- indeksu WIG z okresu od 03-10-1994 do 08-11-2002 (2023 obserwacje). Data początkowa wybrana została jako moment, w którym wprowadzony został na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie pięciosesyjny tydzień notowań.
- średnich dziennych kursów dolara z okresu od 04-01-1993 do 04-11-2002 (2521 obserwacje),
- cen natychmiastowych miedzi ogłaszanych o godzinie 13:15 na Londyńskiej Giełdzie Metali (*The London Metal Exchange (LME)*), które stanowią podstawę do rozliczeń instrumentów pochodnych. Dane pochodzą z okresu od 03-01-1989 do 04-11-2002 (3494 obserwacje).

We wszystkich przypadkach parametry modeli estymowane były za pomocą metody największej wiarygodności z wykorzystaniem procedury opisanej na stronie 150.

Rozpatrywane były modele od najprostszych, do coraz bardziej skomplikowanych. Dla każdego z szeregów rozpoczynano analizę od najczęściej rozpatrywanych modeli z warunkowym rozkładem normalnym. Jako kryterium wyboru modelu wykorzystano najpopularniejsze kryterium informacyjne - kryterium Akaike'a dane wzorem (2.240).

W tabeli 4.1 przedstawione zostały wyniki dopasowania modeli z warunkowym rozkładem normalnym do szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG.

Na podstawie wyestymowanych parametrów modeli, uzyskanych statystyk t oraz kryterium Akaike'a można stwierdzić, iż:

- we wszystkich rozpatrywanych modelach parametr μ był nieistotnie różny od zera,

¹Zdecydowano się korzystać z prostych stóp zwrotu, by nie było konieczności uwzględniania czynnika wynikającego z lematu Itô (por wzór (2.18)).

- we zakresie modelowania warunkowej wartości oczekiwanej, najlepsze okazały się modele zakładające, iż szereg stóp zwrotu jest procesem średniej ruchomej rzędu pierwszego lub procesem autoregresji rzędu drugiego. Ze względu na łatwiejsze formułowanie prognoz, zwykle preferowane są modele autoregresji,
- w zakresie modelowania efektu *GARCH* (na razie bez efektu dźwigni, przy uwzględnieniu autokorelacji w szeregu stóp zwrotu), najlepszy okazał się model najprostszy, czyli symetryczny model *GARCH(1,1)*,
- w przypadku uwzględnienia asymetrycznej krzywej wpływu informacji, badanie wykazało (potwierdzaną w literaturze) ujemną korelację pomiędzy poziomem procesu a wartością wariancji stóp zwrotu. Zgodnie z oczekiwaniami, parametr α_1^- jest dodatni oraz istotnie różny od zera, co świadczy o występowaniu efektu dźwigni, objawiającego się silniejszym wpływem informacji negatywnych na warunkową wariancję procesu, niż informacji pozytywnych.

Na podstawie powyższych obserwacji, co potwierdza także kryterium Akaike'a, można stwierdzić, że najlepszym modelem (spośród rozpatrywanych) do opisu zmian w szeregach stóp zwrotu jest z indeksu WIG jest model *AR(1)-GJR-GARCH(1,1)*. Model ten umożliwia uwzględnienie zarówno efektu autokorelacji, skupiania zmienności, grubych ogonów rozkładu bezwarunkowego, jak i efektu dźwigni.

Analizie poddany został także model *GARCH-M(1,1)*, jednak kryterium Akaike'a zdecydowanie preferuje model z autoregresją. Jest to zgodne z wynikami uzyskanymi przez Hafnera i Herwartza dla szeregów stóp zwrotu z giełdy niemieckiej (w tym dla indeksu DAX) (por. Hafner, Herwartz (1999)). Modele z autoregresją nie posiadają co prawda właściwej modelowi *GARCH-M* prostej interpretacji ekonomicznej (związanej z premią za ryzyko), jednak lepiej dopasowują się do danych empirycznych.

W związku z kontrowersyjną kwestią, czy modelowaniu podlegać powinny szeregi warunkowej wariancji, czy warunkowego odchylenia standardowego, wyestymowano parametry modelu *NARCH(1,1)*. Wartość parametru γ bliska 2 oznacza, że modelowaniu podlegają warunkowe wariancje, natomiast bliska 1 wartość, że - warunkowe odchylenia standardowe. Dla indeksu WIG uzyskano wartość parametru $\gamma = 1,666$, co oznacza, że w przypadku wyboru pomiędzy typowymi modelami z ustaloną wartością parametru $\gamma = 1$ (model *TARCH*) lub $\gamma = 2$ (model *GJR-GARCH*), wybrany powinien zostać model *GJR-GARCH*.

W zakresie modelowania efektu dźwigni ograniczono się jedynie do modelu *GJR-GARCH*, co związane jest ze znacznie prostszą postacią modelu oraz łatwiejszą moż-

liwością aplikacji w zagadnieniach związanych z prognozowaniem zmienności, niż dla np. modelu *EGARCH*.

Ostatecznie można stwierdzić, że spośród modeli z warunkowym rozkładem normalnym, najlepszym okazał się model *AR(1)-GJR-GARCH(1,1)*. Jednak analiza standaryzowanych reszt tego modelu:

$$z_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sqrt{h_t}} \quad (4.1)$$

dowodzi, że nie mają one rozkładu normalnego, i ich rozkład posiada nadal grube ogony.

Dalszej analizie poddano więc modele z warunkowymi rozkładami o grubych ogonach. Zastosowano symetryczny rozkład *GED(0, 1, ν)* oraz symetryczny rozkład $t - St(0, 1, \nu)$. Nie rozpatrywano skośnego rozkładu t-Studenta, gdyż wymagałoby to wprowadzenia kolejnego (już siódmego) parametru modelu, który należałoby wyestymować (w przypadku najogólniejszej postaci). Skośność rozkładu gwarantuje nieujemną wartość parametru α_1^- odpowiedzialnego za opis efektu dźwigni.

Także dla modeli z warunkowymi rozkładami o grubych ogonach najlepszymi ze względu na kryterium Akaike'a okazały się modele *AR(1)-GJR-GARCH(1,1)*.

Odpowiednie parametry określające grubość ogonów rozkładu warunkowego, uzyskały następujące wartości: 1,523 dla rozkładu GED oraz 8,679 dla rozkładu t-Studenta. Potwierdza to przypuszczenie o konieczności stosowania rozkładów warunkowych z grubszymi ogonami niż ogony rozkładu normalnego. Kryterium Akaike'a wskazuje, że najlepsze własności ma model *AR(1)-GJR-GARCH(1,1)* z warunkowym rozkładem t-Studenta.

Jakość dopasowania empirycznych reszt modeli do założonego rozkładu warunkowego zobrazowana została przez wyznaczenie statystyk Kołmogorowa oraz Andersona-Darlinga danych wzorami:

- statystyka Kołmogorowa:

$$K = \max_x |F_e(x) - F(x)|, \quad (4.2)$$

- statystyka Andersona-Darlinga:

$$AD = \max_x \frac{|F_e(x) - F(x)|}{\sqrt{F(x)(1 - F(x))}}, \quad (4.3)$$

gdzie:

$F_e(x)$ - empiryczna dystrybuanta rozkładu dla wartości x ,

$F(x)$ - teoretyczna dystrybuanta rozkładu dla wartości x .

Dla rozkładu GED oraz t-Studenta za liczbę stopni swobody w rozkładzie teoretycznym przyjęto wyestymowaną liczbę stopni swobody.

Im mniejsza wartość statystyk K oraz AD , tym lepsze dopasowanie rozkładu empirycznego do teoretycznego. Statystykę AD stosuję się, gdyż silniej uwypukla informację o ewentualnych niedopasowaniach rozkładów w ogonach.

W tabeli 4.3 zaprezentowane zostały statystyki K oraz AD dla reszt modeli $AR(1)$ - GJR - $GARCH(1,1)$ z różnymi rozkładami warunkowymi dla stóp zwrotu indeksu WIG. Najmniejsze wartości statystyk uzyskano dla rozkładu t-Studenta.

Rysunki 4.1, 4.2, 4.3 prezentują dodatkowo wykresy kwantyl-kwantyl dla uzyskanych szeregów warunkowych reszt oraz szeregów pochodzących z rozkładu teoretycznego. Także na podstawie tych rysunków można stwierdzić, że model z warunkowym rozkładem normalnym $N(0,1)$ najgorzej opisuje szereg stóp zwrotu z indeksu WIG.

Podsumowując, najlepsze dopasowanie dla szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG uzyskano dla modelu $AR(1)$ - GJR - $GARCH(1,1)$ z warunkowym rozkładem t-Studenta.

4.1. Modelowanie zmienności

Tabela 4.1: Oceny parametrów modeli dla indeksu WIG - rozkład normalny

Model	Parametr	wartość	t-st	LLF	AIC
AR(0)-GARCH(0,0) NORM	μ	0,000367	0,91	5229,94	-10455,89
	ω	0,000333	47,41		
AR(1)-GARCH(0,0) NORM	μ	0,000297	0,74	5254,96	-10503,93
	ϕ_1	0,154	11,04		
	ω	0,000325	48,03		
AR(0)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000324	0,93	5437,08	-10843,70
	ω	1,69E-05	6,27		
	β_1	0,802	43,71		
	α_1	0,147	10,73		
AR(0)-GARCH(2,1) NORM	μ	0,000287	0,83	5441,25	-10872,50
	ω	2,15E-05	5,75		
	β_1	0,371	2,86		
	β_2	0,369	3,28		
	α_1	0,196	8,61		
AR(1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000325	0,97	5464,88	-10919,75
	ϕ_1	0,173	7,67		
	ω	1,56E-05	6,23		
	β_1	0,812	45,42		
	α_1	0,138	10,31		
AR(1)-GARCH(2,1) NORM	μ	0,000301	0,90	5465,76	-10885,85
	ϕ_1	0,167	7,10		
	ω	1,79E-05	5,05		
	β_1	0,536	2,75		
	β_2	0,243	1,44		
	α_1	0,165	6,27		
ARMA(1,1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000412	0,97	5467,41	-10922,81
	ϕ_1	-0,0778	-0,64		
	θ_1	0,263	2,19		
	ω	1,57E-05	6,26		
	β_1	0,811	45,20		
	α_1	0,140	10,41		
MA(1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000398	1,00	5466,48	-10922,97
	θ_1	0,188	7,85		
	ω	1,57E-05	6,25		
	β_1	0,811	45,22		
	α_1	0,139	10,37		
AR(2)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000325	0,96	5467,49	-10922,97
	ϕ_1	0,185	7,70		
	ϕ_2	-0,0572	-2,32		
	ω	1,58E-05	6,27		
	β_1	0,810	45,07		
	α_1	0,140	10,45		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000160	0,46	5439,57	-10869,15
	ω	1,66E-05	3,80		
	β_1	0,805	25,10		
	α_1	0,118	5,17		
	α_1^-	0,0537	2,16		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000108	0,32	5468,44	-10924,88
	ϕ_1	0,177	7,60		
	ω	1,52E-05	4,01		
	β_1	0,816	29,08		
	α_1	0,104	5,08		
	α_1^-	0,064	2,53		
GARCH-M(1,1) NORM	μ	0	-	5436,85	-10863,69
	λ	0,173	1,31		
	ω	1,56E-05	3,95		
	β_1	0,812	25,71		
	α_1	0,138	6,46		
NARCH(1,1) NORM	μ	0,000303	0,88	5437,93	-10856,86
	ω	7,05E-05	2,10		
	β_1	0,804	26,45		
	α_1	0,155	6,65		
	γ	1,666	5,51		

4.1. Modelowanie zmienności

Tabela 4.2: Oceny parametrów modeli dla indeksu WIG - rozkład GED i t-Stud

Model	Parametr	wartość	t-st	LLF	AIC
AR(0)-GARCH(1,1) GED	μ	0,000215	0,67	5456,87	-10903,75
	ω	1,37E-05	3,20		
	β_1	0,823	24,78		
	α_1	0,136	5,45		
	ν	1,493	22,25		
AR(1)-GARCH(1,1) GED	μ	0,000215	0,68	5483,51	-10955,00
	ϕ_1	0,169	7,26		
	ω	1,27E-05	3,38		
	β_1	0,829	27,95		
	α_1	0,131	5,79		
	ν	1,514	23,07		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) GED	μ	0,000106	0,32	5458,78	-10871,90
	ω	1,33E-05	3,07		
	β_1	0,825	24,21		
	α_1	0,111	4,42		
	α_1^-	0,0507	2,32		
	ν	1,499	22,23		
	AR(1)-GJR-GARCH(1,1) GED	μ	5,95E-05		
ϕ_1		0,171	7,83		
ω		1,25E-05	3,25		
β_1		0,831	27,35		
α_1		0,101	4,44		
α_1^-		0,0600	2,16		
ν		1,523	22,99		
AR(0)-GARCH(1,1) STUD	μ	0,000215	0,66	5456,80	-10903,60
	ω	1,13E-05	3,01		
	β_1	0,838	27,32		
	α_1	0,129	5,36		
	ν	8,927	5,33		
AR(1)-GARCH(1,1) STUD	μ	0,000202	0,64	5486,56	-10961,13
	ϕ_1	0,179	7,78		
	ω	1,05E-05	3,14		
	β_1	0,845	30,86		
	α_1	0,124	5,66		
	ν	8,551	5,60		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) STUD	μ	9,91E-05	0,30	5458,68	-10905,35
	ω	1,10E-05	2,88		
	β_1	0,840	26,77		
	α_1	0,106	4,41		
	α_1^-	0,0480	1,86		
	ν	8,942	5,31		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) STUD	μ	5,24E-05	0,16	5488,84	-10963,67
	ϕ_1	0,180	7,84		
	ω	1,03E-05	3,04		
	β_1	0,845	30,24		
	α_1	0,0978	4,45		
	α_1^-	0,0560	2,03		
	ν	8,679	5,52		

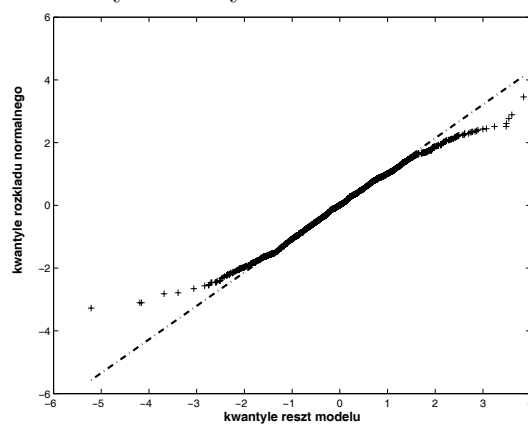
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.3: Statystyki K i AD dla indeksu WIG

	$N(0, 1)$	$t - St(0, 1, \nu)$	$GED(0, 1, \nu)$
statystyka K	0,02657	0,00903	0,01222
statystyka A-D	0,17335	0,04053	0,06412

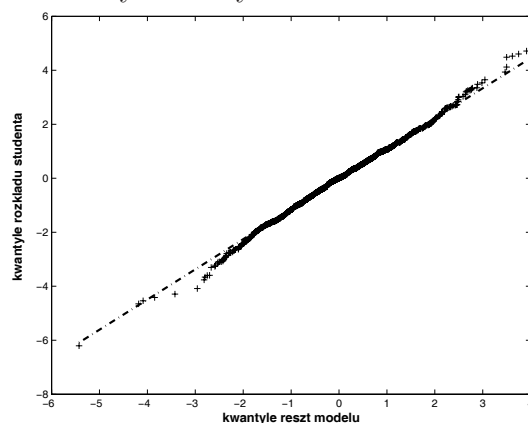
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 4.1: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (indeks WIG)



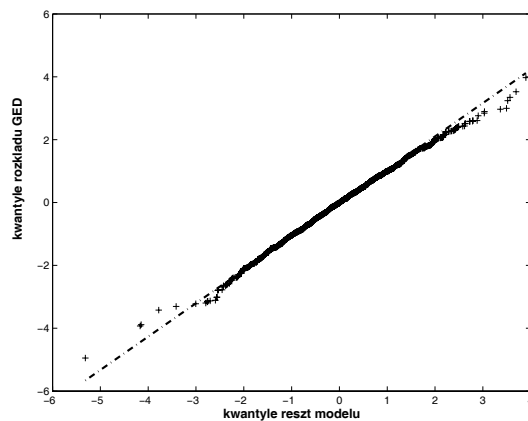
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.2: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu t-Studenta (indeks WIG)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.3: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu GED (indeks WIG)



Źródło: opracowanie własne.

Analogiczne badania przeprowadzono dla szeregów stóp zwrotu z cen miedzi oraz kursów dolara.

Dla szeregu stóp zwrotu z cen miedzi zaobserwowano, że:

- parametr μ jest nieistotnie różny od zera dla poziomu istotności 0,05,
- w zakresie modelowania warunkowej wartości oczekiwanej, najlepsze efekty uzyskano dla modelu średniej ruchomej rzędu pierwszego. W modelu z autoregresją rzędu drugiego, parametr ϕ_2 okazał się nieistotnie różny od zera przy poziomie istotności 0,05. Nieznacznie gorszy z punktu widzenia kryterium Akaike'a od modelu $MA(1)$ okazał się model autoregresji rzędu pierwszego, który został ze względu na łatwiejsze formułowanie prognoz, zastosowany w dalszych analizach.
- w zakresie modelowania efektu $GARCH$ najlepszy okazał się model $GARCH(2,1)$,
- parametr odpowiedzialny za istnienie efektu dźwigni okazał się nieistotnie różny od zera dla poziomu istotności 0,05, co potwierdza, że w szeregach stóp zwrotu z kursów towarów nie występuje efekt dźwigni,
- model $GARCH-M(1,1)$ okazał się gorszym modelem ze względu na kryterium Akaike'a od modelu $AR(1)-GARCH(1,1)$.

Także w tym przypadku wyestymowano modele z warunkowymi rozkładami o grubych ogonach zawierające się w modelu $AR(1)-GJR-GARCH(1,1)$. Uzyskane wartości parametrów określających grubość ogonów świadczą o tym, że dla stóp zwrotu z cen miedz, konieczne jest uwzględnienie rozkładów o grubych ogonach.

Podsumowując, najlepszym modelem okazał się model $AR(1)-GARCH(2,1)$ z warunkowym rozkładem t-Studenta. W przypadku konieczności estymacji parametrów procesu na podstawie krótszych szeregów czasowych, koniecznym może stać się, w celu zmniejszenia błędów oszacowania parametrów, skorzystanie z uboższej postaci i wybór modelu $AR(1)-GARCH(1,1)$.

4.1. Modelowanie zmienności

Tabela 4.4: Oceny parametrów modeli dla cen miedzi - rozkład normalny

Model	Parametr	wartość	t-st	LLF	AIC
AR(0)-GARCH(0,0) NORM	μ	-0,000107	-0,40	9572,76	-19141,53
	ω	0,000244	89,07		
AR(1)-GARCH(0,0) NORM	μ	-0,000122	-0,46	9596,10	-19186,19
	ϕ_1	-0,116	-11,02		
	ω	0,000241	84,00		
AR(0)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000053	0,24	9937,38	-19866,76
	ω	5,08E-06	6,34		
	β_1	0,8883	109,39		
	α_1	0,099	15,29		
AR(0)-GARCH(2,1) NORM	μ	0,000064	0,29	9945,32	-19880,64
	ω	7,79E-06	6,29		
	β_1	0,198	4,26		
	β_2	0,621	13,22		
	α_1	0,153	15,92		
AR(1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000038	0,17	9948,59	-19887,19
	ϕ_1	-0,086	-4,96		
	ω	5,01E-06	6,46		
	β_1	0,885	113,22		
	α_1	0,097	15,33		
AR(1)-GARCH(2,1) NORM	μ	0,000048	0,22	9957,32	-19902,64
	ϕ_1	-0,093	-5,03		
	ω	7,78E-06	6,36		
	β_1	0,195	4,31		
	β_2	0,625	13,69		
	α_1	0,152	16,15		
MA(1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000033	0,16	9949,35	-19888,69
	θ_1	-0,091	-5,20		
	ω	4,97E-06	6,46		
	β_1	0,886	114,12		
	α_1	0,096	15,35		
AR(2)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000037	0,17	9949,61	-19887,22
	ϕ_1	-0,089	-5,06		
	ϕ_2	-0,0278	-1,53		
	ω	4,99E-06	6,44		
	β_1	0,885	112,92		
	α_1	0,097	15,25		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000028	0,13	9937,63	-19865,27
	ω	5,15E-06	4,17		
	β_1	0,881	63,47		
	α_1	0,095	7,67		
	α_1^-	0,0110	0,70		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000022	0,10	9948,94	-19885,88
	ϕ_1	-0,086	-4,77		
	ω	5,04E-06	4,17		
	β_1	0,884	64,39		
	α_1	0,094	7,71		
	α_1^-	0,008	0,54		
GARCH-M(1,1) NORM	μ	0,001062	1,38	9938,34	-19866,69
	λ	-0,081	-1,36		
	ω	5,04E-06	4,16		
	β_1	0,882	64,76		
	α_1	0,100	8,63		
NARCH(1,1) NORM	μ	0,000048	0,23	9938,94	-19867,88
	ω	2,45E-05	2,16		
	β_1	0,888	68,71		
	α_1	0,106	8,96		
	γ	1,623	8,26		

Źródło: obliczenia własne.

4.1. Modelowanie zmienności

Tabela 4.5: Oceny parametrów modeli dla cen miedzi - rozkład GED i t-Stud

Model	Parametr	wartość	t-st	LLF	AIC
AR(0)-GARCH(1,1) GED	μ	-0,000220	-1,05	10005,18	-20000,36
	ω	4,22E-06	3,37		
	β_1	0,895	59,81		
	α_1	0,089	6,95		
	ν	1,395	31,73		
AR(1)-GARCH(1,1) GED	μ	-0,000270	-1,32	10022,41	-20032,82
	ϕ_1	-0,104	-5,66		
	ω	4,05E-06	3,33		
	β_1	0,899	61,11		
	α_1	0,0850	6,78		
	ν	1,379	32,06		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) GED	μ	-0,000229	-1,08	10005,21	-19998,43
	ω	4,12E-06	3,35		
	β_1	0,894	57,93		
	α_1	0,087	6,41		
	α_1^-	0,004	0,25		
	ν	1,395	31,71		
	AR(1)-GJR-GARCH(1,1) GED	μ	-2,71E-04		
ϕ_1		-0,104	-5,63		
ω		4,05E-06	3,17		
β_1		0,899	54,48		
α_1		0,085	5,59		
α_1^-		0,0001	0		
ν		1,379	32,05		
AR(0)-GARCH(1,1) STUD		μ	-0,000165	-0,82	10019,07
	ω	3,72E-06	3,28		
	β_1	0,903	64,19		
	α_1	0,083	6,71		
	ν	6,662	9,47		
AR(1)-GARCH(1,1) STUD	μ	-0,000200	-0,99	10037,23	-20062,46
	ϕ_1	-0,103	-6,06		
	ω	3,54E-06	3,21		
	β_1	0,908	65,35		
	α_1	0,079	6,47		
	ν	6,344	9,77		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) STUD	μ	-1,66E-04	-0,79	10019,07	-20026,14
	ω	3,72E-06	3,11		
	β_1	0,903	57,52		
	α_1	0,083	5,96		
	α_1^-	0,0001	0		
	ν	6,662	9,45		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) STUD	μ	-2,004E-04	-0,96	10037,23	-20060,45
	ϕ_1	-0,103	-6,04		
	ω	3,54E-06	2,95		
	β_1	0,908	55,59		
	α_1	0,0789	5,98		
	α_1^-	0,0001	0		
	ν	6,342	9,75		

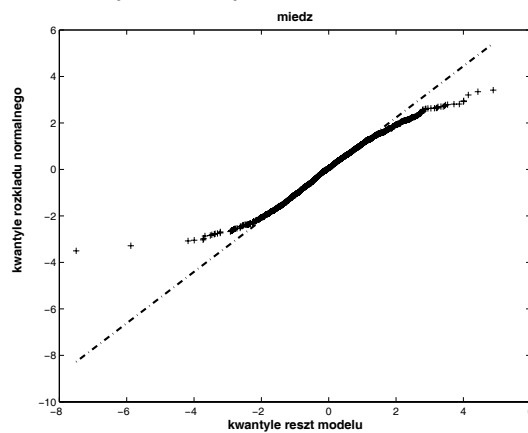
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.6: Statystyki K i AD dla cen miedzi

	$N(0, 1)$	$t - St(0, 1, \nu)$	$GED(0, 1, \nu)$
statystyka K	0,03367	0,01746	0,02019
statystyka A-D	0,16041	0,04516	0,05826

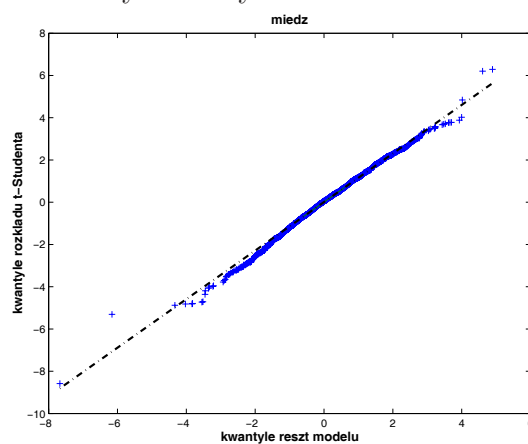
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 4.4: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (ceny miedzi)



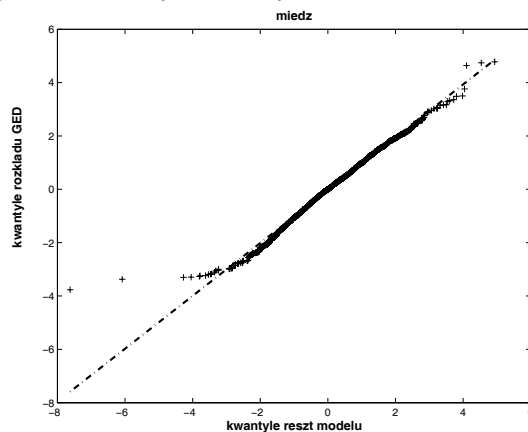
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.5: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu t-Studenta (ceny miedzi)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.6: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu GED (ceny miedzi)



Źródło: opracowanie własne.

Analiza szeregu stóp zwrotu z kursu dolara wykazała natomiast, że:

- w szeregu nie występuje efekt autokorelacji rzędu pierwszego, parametr ϕ_1 jest nieistotnie różny od zera przy poziomie istotności 0,05,
- parametr μ jest statystycznie różny od zera, lecz jego wartość jest bardzo bliska zeru,
- nie występuje efekt dźwigni, parametr α_1^- jest równy zero,
- optymalną z punktu widzenia kryterium Akaike'a postacią modelu warunkowej wariancji jest model $GARCH(1,1)$.

Także w tym przypadku znaczącą poprawę własności modelu uzyskuje się poprzez wprowadzenia rozkładu warunkowego o grubszych ogonach niż dla rozkładu normalnego.

Ostatecznie najlepszym, z punktu widzenia kryterium Akaike'a okazał się model $GARCH(1,1)$ z warunkowym rozkładem t-Studenta.

4.1. Modelowanie zmienności

Tabela 4.7: Oceny parametrów modeli dla kursu dolara - rozkład normalny

Model	Parametr	wartość	t-st	LLF	AIC
AR(0)-GARCH(0,0) NORM	μ	0,000375	3,22	9493,16	-18982,32
	ω	0,000031	107,10		
AR(1)-GARCH(0,0) NORM	μ	0,000360	3,01	9494,72	-18965,95
	ϕ_1	0,033	2,82		
	ω	0,000031	107,23		
AR(0)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000288	2,76	9688,79	-19369,59
	ω	4,769E-06	10,63		
	β_1	0,669	26,14		
	α_1	0,193	14,38		
AR(0)-GARCH(2,1) NORM	μ	0,000289	2,76	9688,79	-19367,59
	ω	4,73E-06	9,21		
	β_1	0,670	6,91		
	β_2	0,01	0,01		
	α_1	0,192	13,95		
AR(1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000279	2,65	9689,77	-19369,53
	ϕ_1	0,028	1,13		
	ω	4,67E-06	10,16		
	β_1	0,672	25,92		
	α_1	0,193	14,06		
ARMA(1,1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000270	2,67	9689,77	-19367,54
	ϕ_1	0,0616	4,95		
	θ_1	-0,034	-2,72		
	ω	4,64E-06	10,15		
	β_1	0,674	26,10		
	α_1	0,191	14,05		
MA(1)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000291	2,71	9689,46	-19368,93
	θ_1	0,028	1,12		
	ω	4,63E-06	10,11		
	β_1	0,674	26,14		
	α_1	0,192	14,09		
AR(2)-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000279	2,64	9689,12	-19366,24
	ϕ_1	0,028	1,12		
	ϕ_2	-0,0001	0		
	ω	4,67E-06	10,01		
	β_1	0,672	25,94		
	α_1	0,193	13,80		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000286	2,97	9688,79	-19367,58
	ω	4,73E-06	5,81		
	β_1	0,670	15,85		
	α_1	0,192	7,44		
	α_1^-	0	0		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) NORM	μ	0,000289	3,00	9689,08	-19366,15
	ϕ_1	0,030	1,23		
	ω	3,96E-06	5,76		
	β_1	0,707	18,57		
	α_1	0,180	7,30		
	α_1^-	0	0		
GARCH-M(1,1) NORM	μ	0,00105	2,32	9688,98	-19367,56
	λ	-0,158	-1,73		
	ω	4,84E-06	5,75		
	β_1	0,664	15,25		
	α_1	0,194	7,51		
NARCH(1,1) NORM	μ	0,000318	2,32	9690,04	-19370,08
	ω	4,09E-05	-1,73		
	β_1	0,723	5,75		
	α_1	0,184	15,25		
	γ	1,554	7,51		

Źródło: obliczenia własne.

4.1. Modelowanie zmienności

Tabela 4.8: Oceny parametrów modeli dla kursu dolara - rozkład GED i t-Stud

Model	Parametr	wartość	t-st	LLF	AIC
AR(0)-GARCH(1,1) GED	μ	0,000312	3,42	9916,50	-19822,99
	ω	1,60E-06	3,45		
	β_1	0,793	21,88		
	α_1	0,167	5,69		
	ν	1,134	31,47		
AR(1)-GARCH(1,1) GED	μ	0,000328	7,94	9917,02	-19822,03
	ϕ_1	-0,020	-3,00		
	ω	1,61E-06	3,47		
	β_1	0,793	21,87		
	α_1	0,167	5,70		
	ν	1,131	31,55		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) GED	μ	0,000311	3,47	9916,49	-19820,98
	ω	1,60E-06	3,46		
	β_1	0,793	22,04		
	α_1	0,167	5,91		
	α_1^-	0,0001	0		
	ν	1,134	31,70		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) GED	μ	0,000328	8,51	9917,01	-19820,02
	ϕ_1	-0,020	-2,96		
	ω	1,61E-06	3,46		
	β_1	0,793	21,71		
	α_1	0,167	5,34		
	α_1^-	0,0001	0		
	ν	1,131	31,26		
AR(0)-GARCH(1,1) STUD	μ	0,000389	5,05	9956,36	-19902,71
	ω	1,06E-06	3,47		
	β_1	0,824	29,33		
	α_1	0,152	5,96		
	ν	4,937	10,58		
AR(1)-GARCH(1,1) STUD	μ	0,000393	5,07	9956,45	-19900,90
	ϕ_1	-0,009	-0,44		
	ω	1,06E-06	3,48		
	β_1	0,824	29,39		
	α_1	0,152	5,96		
	ν	4,922	10,58		
AR(0)-GJR-GARCH(1,1) STUD	μ	0,000389	5,13	9956,35	-19900,70
	ω	1,06E-06	3,47		
	β_1	0,824	29,37		
	α_1	0,152	7,00		
	α_1^-	0,0001	0		
	ν	4,934	10,78		
AR(1)-GJR-GARCH(1,1) STUD	μ	0,000392	5,06	9956,45	-19898,89
	ϕ_1	-0,009	-0,43		
	ω	1,06E-06	3,47		
	β_1	0,824	29,36		
	α_1	0,1519	5,82		
	α_1^-	0,0001	0		
	ν	4,922	10,55		

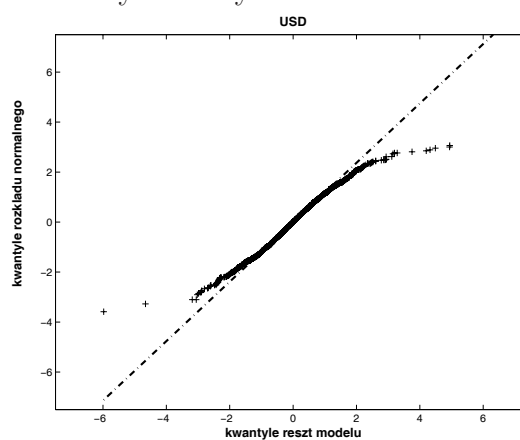
Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.9: Statystyki K i AD dla kursu dolara

	$N(0, 1)$	$t - St(0, 1, \nu)$	$GED(0, 1, \nu)$
statystyka K-S	0,05901	0,01564	0,02059
statystyka A-D	0,21373	0,03129	0,05397

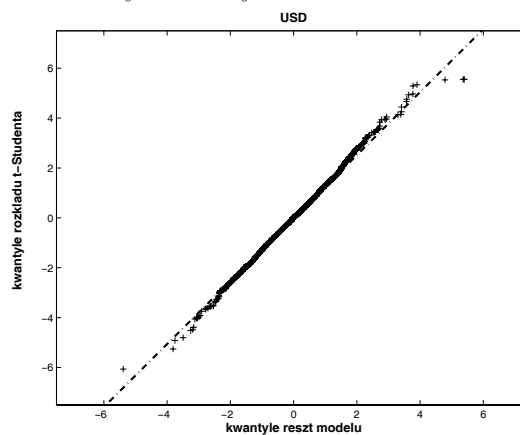
Źródło: obliczenia własne.

Rysunek 4.7: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (kurs dolara)



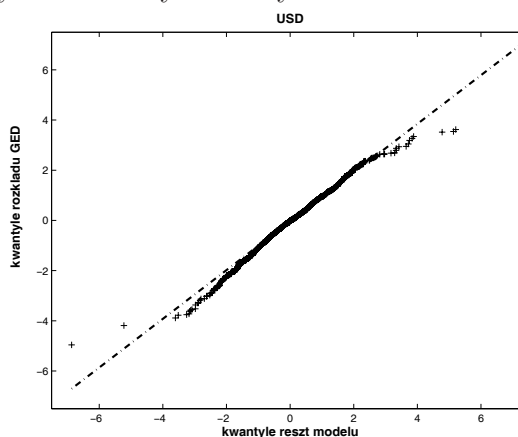
Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.8: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu t-Studenta (kurs dolara)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.9: Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu GED (kurs dolara)



Źródło: opracowanie własne.

4.2. Prognozy zmienności - modele szeregów czasowych

Podrozdział ten poświęcony został zbadaniu możliwości prognozowania zmienności stóp zwrotu indeksu WIG, dolara oraz miedzi w kolejnych miesiącach kalendarzowych za pomocą technik wykorzystujących modele szeregów czasowych zaprezentowanych w rozdziale 3.

Celem rozdziału jest odpowiedź na pytanie, która z omówionych w rozdziale 3 technik przynosiła najlepsze wyniki (jest obciążona najmniejszym błędem średnim *ex post*).

Badaniem objętych zostały zmienności z 90 miesięcy z okresu od maja 1995 do października 2002 roku. Próba podzielona została na część „uczącą”, w obrębie której dobierane były parametry niektórych technik prognozy oraz na część „testową”, na której badana była skuteczność poszczególnych technik. Próba „ucząca” obejmowała 30 miesięcy z okresu od maja 1995 do października 1997, natomiast próba „testowa” obejmowała pozostałe 60 miesięcy z okresu od listopada 1997 do października 2002 roku. Dla każdego z instrumentów wyznaczono prognozy w oparciu o pięć podejść.

- Osobno badano techniki prognozowania uwzględniające, że w procesie formułowania prognozy wykorzystuje się wiedzę o przeszłych zrealizowanych odchyleniach standardowych stóp zwrotu oraz o przeszłych zrealizowanych wariancjach. Ma to na celu odpowiedź na pytanie, które z podejść zapewnia lepsze prognozy w odniesieniu do rozpatrywanych instrumentów. W literaturze przedmiotu kwe-

stia ta pozostaje nierozstrzygnięta i różni autorzy wybierają raz jedno, raz drugie podejście.

- W ramach każdego z zasygnalizowanych powyżej rozwiązań, pomiar wariancji lub odchylenia standardowego w kolejnym miesiącu dokonywany będzie w oparciu o wzór (1.3) lub wzór (1.5). Wzór (1.5) zakłada, że parametr średniej stopy zwrotu wynosi dla krótkich horyzontów zero. Podejście to powinno poprawiać jakość pomiaru zmienności, a tym samym jakość prognoz. Dla niewielkiej liczby obserwacji, jakimi dysponuje się w przypadku wyznaczania zmienności dla kolejnych miesięcy kalendarzowych w oparciu o jednodniowe stopy zwrotu, pojedyncze nietypowe obserwacje mogą wносить duży błąd do oszacowanej średniej. Błąd ten przekłada się następnie na błąd pomiaru zmienności, a w dalszej kolejności na jakość prognoz.
- Ostatnie, piąte podejście wykorzystuje do tworzenia prognoz modele zawarte w modelu $AR(1)$ - GJR - $GARCH(1,1)$. Sprawdzono również, czy lepszych prognoz zmienności nie uzyskuje się w przypadku wykorzystania informacji o długoterminowej wariancji bezwarunkowej procesu wynikającej z danego modelu z warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją.

Dla każdego z podejść dokonano przeliczenia prognozy zmienności na okres roczny, w celu dostosowania wyniku do podejścia znanego z wyceny opcji, gdzie zmienność podaje się w skali roku. Odpowiednie przeskalowanie nie ma oczywiście wpływu na ocenę, która z prezentowanych technik okazała się najlepsza.

Podsumowując, rozpatrywane były prognozy odchylenia standardowego stóp zwrotu oparte na modelach GARCH oraz na czterech przypadkach konstrukcji prognoz dla stałego parametru zmienności w miesiącu, a mianowicie na:

- przetwarzaniu informacji o zrealizowanych wariancjach liczonych ze wzoru ze średnią,
- przetwarzaniu informacji o zrealizowanych wariancjach liczonych ze wzoru bez średniej,
- przetwarzaniu informacji o zrealizowanych odchyleniach standardowych liczonych ze wzoru ze średnią,
- przetwarzaniu informacji o zrealizowanych odchyleniach standardowych liczonych ze wzoru bez średniej.

W ramach każdego z podejść wyznaczone zostały prognozy w oparciu o techniki omówione w rozdziale 3.2.1. W przypadku prognoz opartych na średnich ruchomych,

analizowano średnie z 3, 5 i 12 ostatnich miesięcy. Ważona średnia ruchoma wyznaczana była na podstawie informacji o 3 ostatnich miesiącach, przy czym w ramach procedury „postarzania informacji” przyjęto subiektywnie następujący zestaw wag [0,5; 0,3; 0,2]. W przypadku wygładzania wykładniczego oraz średniej ruchomej wygładzanej wykładniczo, rozpatrywano dwie wartości parametru λ . Pierwsza, która minimalizowała błąd RMSE wewnątrz próby „uczącej” oraz druga, zaproponowana przez bank J.P. Morgan na poziomie 0,94. Parametry w technikach opartych na autoregresji wyznaczone były na podstawie 30 ostatnich miesięcy.

Dla każdego z instrumentów oraz każdego analizowanego podejścia, wyznaczono błędy prognoz oraz parametry umożliwiające ocenę efektywności prognoz. Wyniki przedstawione zostały w tabelach 4.10-4.12.

Na podstawie uzyskanych wyników można wyciągnąć następujące spostrzeżenia.

Dla prognoz zmienności indeksu WIG w kolejnych miesiącach:

- mniejsze błędy *ex post* prognoz otrzymano dla technik opartych na przetwarzaniu informacji o zrealizowanych w przeszłych miesiącach odchyleniach standardowych,
- mniejsze błędy *ex post* prognoz otrzymano na podstawie wzorów, w których pomiar zrealizowanej zmienności odbywał się przy założeniu, że wartość oczekiwana jednodniowych stóp zwrotu wynosi zero (wniosek ten jest potwierdzeniem wyniku uzyskanego w poprzednim podrozdziale),
- prognozy uzyskiwane w oparciu o modele klasy *GARCH* nie okazały się lepsze (o mniejszym błędzie *ex post*) niż niektóre proste techniki prognozowania. Prognozy oparte na długoterminowych średnich wariancjach wynikających z modeli *GARCH* (oznaczane jako *VGARCH*, *VARGARCH*, *VGJR* i *VARGJR*) są obarczone największymi błędami *ex post*, co dowodzi, że uwzględnianie zmian w poziomie zmienności, na przykład powrotu do średniej prowadzi do poprawienia jakości prognoz,
- krótkoterminowe średnie ruchome okazały się lepsze od długoterminowych,
- ważona średnia ruchoma WMA uwzględniająca efekt postarzania informacji okazała się lepsza niż model zwykłej krótkoterminowej średniej ruchomej,
- zarówno dla wygładzania wykładniczego, jak i dla ważonej wykładniczo średniej ruchomej, uzyskano lepsze prognozy w przypadku zastosowania

parametru wygładzania (λ), który minimalizował błędy prognoz w obrębie próby uczącej (prognozy ES1 i EWMA1), niż w przypadku zastosowania zalecanej w metodologii RiskMetrics wartości 0,94. Optymalne współczynniki uzyskane na podstawie próby uczącej były niższe niż 0,5,

- modele autoregresji rzędu pierwszego okazały się lepsze niż modele rzędu trzeciego,
- w przypadku technik opartych na wariancji oraz modelach *GARCH* następuje częściej niedoszacowanie niż przeszacowanie zmienności, o czym świadczą większe wartości błędów MMEU niż MMEO. W przypadku technik opartych na odchyleniu standardowym, efekt ten jest słabszy.

Ostatecznie zalecić można dokonywanie prognoz zmienności dla kolejnych miesięcy na podstawie technik opartych na zrealizowanym odchyleniu standardowym wyznaczanym na podstawie wzoru bez średniej. Najmniejsze średnie błędy prognoz otrzymano dla techniki MA(3) i WMA. Zbliżone wartości błędów MMEO oraz MMEU świadczą o tym, że te dwie proponowane techniki w przeszłości nie powodowały systematycznego zawyżania ani zaniżania zmienności.

Dla prognoz zmienności cen miedzi uzyskano zbliżone własności poszczególnych technik prognozowania jak dla prognoz zmienności dla indeksu WIG. Jediną znaczącą różnicą jest fakt, iż brak jest różnicy, czy wyznaczamy zmienność na podstawie wzorów ze średnią lub bez.

Ostatecznie w przypadku prognozowania zmienności stóp zwrotu dla kursów miedzi w kolejnych miesiącach zaproponować należałoby wykorzystywanie techniki MA(3) lub WMA.

Do odmiennych wniosków prowadzą wyniki badań nad prognozowaniem zmienności stóp zwrotu dla kursu dolara. W tym przypadku najlepszą techniką prognozowania okazała się technika oparta na modelu *GARCH(1,1)*. Podejście to przewyższa znacznie wszystkie pozostałe analizowane techniki. Zbliżona wartość błędów asymetrycznych MMEO i MMEU, przy najniższym poziomie błędów asymetrycznych jest również zaletą tej techniki świadcząca, iż w okresie ostatnich 60 miesięcy nie następowało systematyczne przeszacowanie lub niedoszacowanie parametru zmienności.

Najwyższą efektywność prognoz mierzoną współczynnikiem R^2 regresji danej wzorem (3.70) uzyskano dla prognoz zmienności indeksu WIG. Najlepsze techniki prognoz

tłumaczą około w 30% zrealizowaną zmienność w kolejnych miesiącach. Efektywność prognoz dla zmienności cen miedzi jest znacznie niższa i współczynnik R^2 wynosi dla najlepszych technik około 13-15%. Współczynnik R^2 dla prognoz zmienności kursów dolara jest dla modelu *GARCH* bliski jedynie 5%. Dla pozostałych technik jest on praktycznie bliski zeru.

Tabela 4.10: Oceny prognoz zmienności indeksu WIG

Tabela 4.11: Oceny prognoz zmienności kursu dolara

Tabela 4.12: Oceny prognoz zmienności cen miedzi

4.3. Prognozy zmienności - zmienność implikowana

Odmianą koncepcją prognozowania zmienności jest metoda oparta na analizie oczekiwań rynku oraz znajomości poprawnej formuły wyceny opcji. Poniżej przedstawione zostaną wyniki badań dotyczące przydatności tej metody w prognozowaniu przyszłej, nieznanej wartości zmienności warszawskiego indeksu WIG20. Badanie oparte zostało na notowaniach warrantów na WIG20 emitowanych przez BRE BANK S.A. oraz Centralny Dom Maklerski Pekaó S.A.

Co prawda trudno uznać, że rynek polski spełnia założenia modelu Blacka-Scholesa oraz jest rynkiem płynnym i efektywnym, niemniej może występować sytuacja, iż mimo niespełnienia tych warunków, zmienność implikowana jest dobrą prognozą. Celem przykładu jest odpowiedź na pytanie, czy możliwe jest w warunkach polskich prognozowanie zmienności wartości indeksu WIG20 na kolejny miesiąc oraz na trzy kolejne miesiące na podstawie zmienności implikowanej warrantów na WIG20 notowanych na GPW. Warranty na WIG20 zadebiutowały na GPW w dniu 20 października 1999. Badanie objęło 23 punkty czasowe (pierwsze dni sesyjne kolejnych miesięcy począwszy od 2-11-1999 aż do 3-09-2001), dla których wyznaczone zostały zmienności implikowane dla notowanych w tych dniach warrantów kupna i sprzedaży na WIG20 oraz wyznaczone zostały łączne oszacowania zmienności. Zmienności implikowane wyznaczane były na podstawie wzorów (3.40)-(3.42), będących zaproponowanym przez D. Frencha uogólnieniem klasycznego modelu Blacka-Scholesa (uwzględniającym fakt, że zmienność jest zazwyczaj większa w dniach transakcyjnych niż nietransakcyjnych, co prowadzi do odmiennego uwzględniania dni trasakcyjnych i nietransakcyjnych). Zaproponowana modyfikacja ma wpływ na szacowanie zmienności implikowanej warrantów szczególnie o krótkim terminie do wygaśnięcia.

Dla uproszczenia założono, że stopa dywidendy q spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 wynosi zero. Jako oszacowanie stopy wolnej od ryzyka przyjęto rentowność 13-tygodniowych bonów skarbowych (średni czas do wykupu dla analizowanych warrantów). W przypadku, gdy liczba transakcji (umożliwiających wyznaczenie zmienności implikowanej) w rozpatrywanym dniu była niewielka, do analiz włączano notowania warrantów z dnia wcześniejszego lub dwóch dni wcześniejszych, co jest zgodne z prezentowanym w rozdziale 3 podejściem wyznaczania parametru łącznej zmienności implikowanej na podstawie cen warrantów zarówno z dnia formułowania prognozy, jak i kilku wcześniejszych. **Łącznie w badaniu uwzględniono 501 transakcji na warrantach (średnio 22 transakcje dla każdego z punktów**

formułowania prognozy). Ponieważ w wielu przypadkach cena warrantu notowana w danym dniu znajdowała się poza górną lub dolną teoretyczną granicą ceny, nie było możliwości wyznaczenia parametru zmienności implikowanej (otrzymywano ujemną zmienność implikowaną). Sytuacja taka wystąpiła w przypadku 105 transakcji. W tabeli 4.15 sytuacja taka zasygnalizowana została przez wpisanie w odpowiednich kolumnach znaków „XXXX”. Ostatecznie prognozy zmienności wyznaczone były na podstawie 396 transakcji dla 31 różnych serii warrantów. Wyznaczone zostały wartości parametrów *vega* oraz elastyczności dla poszczególnych warrantów. Wyznaczony został również współczynnik *moneyness* informujący o tym, czy dana opcja jest *in-the-money*, *at-the-money*, czy *out-of-the-money*. Przykładowe wyniki pośrednie dla jednego z dni formułowania prognozy przedstawiono w tabeli 4.15.

Dla każdego z 23 rozpatrywanych punktów czasu wyznaczono prognozy zmienności w postaci odpowiednio oszacowanych łącznych parametrów zmienności implikowanej. Wyniki przedstawione zostały w tabeli 4.16. Wykorzystano następujące metody: ST - wzór (3.51), mLR - wzór (3.54), CM - wzór (3.57), ATM - za prognozę przyjmowano zmienność implikowaną dla warrantu będącego najbliżej *at-the-money*. Ostatnie dwa wiersze, to zmienności zrealizowane w rzeczywistości w okresie 1 i 3 miesięcy od dnia prognozy. Jakość prognoz oszacowana została na podstawie symetrycznych i niesymetrycznych błędów prognoz.

Odpowiednie błędy oraz miary efektywności prognoz zmienności na podstawie powyższych metod dla okresu 1 i 3 miesięcy przedstawiają tabela 4.13 i tabela 4.14. Na podstawie uzyskanych wyników możemy stwierdzić, najlepsze wyniki prognoz uzyskano na podstawie wzoru Chirasa i Manastera. W tym przypadku prognoza wyjaśnia około 28% zmian poziomu zmienności w analizowanych miesiącach, a błędy prognoz są najmniejsze. Zmienności implikowane we wszystkich przypadkach przewyższają wartości zmienności rzeczywiście zrealizowanej w przyszłości. Średnio zmienność implikowana jest o 70% większa niż zrealizowana. Oznacza to, że ceny warrantów są wyższe niż wynikałoby to z modelu teoretycznego. Dla metody wykorzystującej zmodyfikowany wzór Latane i Rendlemana uzyskano porównywalne wartości błędów *ex post*. Uzyskane dla tej metody R^2 jest wyższe niż dla metody CM, ale również wyższe są błędy prognoz. Obydwie metody „uśredniają” zmienności implikowanych zmienności nakładając większe wagi dla zmienności uzyskanych dla warrantów będących *at-the-money*. Gorsze wyniki uzyskano dla prognoz wynikających z metody ST (równe wagi dla wszystkich warrantów) oraz dla metody ATM uwzględniającej tylko warrant, dla którego wartość współczynnika *moneyness* jest najbliższa zeru. Prognozy dla ho-

4.3. Prognozy zmienności - zmienność implikowana

ryzontu 3 miesięcy obarczone były większym błędem *ex post* niż dla horyzontu 1 miesiąca. Uzyskany współczynnik efektywności prognoz w oparciu o zmienności implikowane jest wyższy niż dla prognoz uzyskanych metodą historyczną.

Tabela 4.13: Błędy prognoz zmienności implikowanej dla horyzontu 1 miesiąca

1M	RMSE	MAE	MMEU	MMEO	α	β	R^2
ST	25,39	22,16	22,91	44,48	18,03	0,2337	0,2788
mLR	25,13	21,97	22,69	44,43	17,46	0,2455	0,3037
CM	24,33	19,95	19,95	41,04	18,98	0,2231	0,2862
ATM	26,47	21,78	23,56	42,35	22,68	0,1480	0,1609

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.14: Błędy prognoz zmienności implikowanej dla horyzontu 3 miesięcy

3M	RMSE	MAE	MMEU	MMEO	α	β	R^2
ST	25,32	21,55	22,47	43,76	25,23	0,1136	0,1118
mLR	25,11	21,36	22,26	43,53	24,96	0,1191	0,1214
CM	0,2418	19,29	19,95	40,49	24,58	0,1306	0,1663
ATM	27,37	21,91	24,57	41,20	31,49	-0,0072	0,0007

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.15: Zmienności implikowane dla poszczególnych warrantów (prognoza na dzień 01-06-2001)

Warrant	Data	Data wykon.	Dni ses.	Dni kalen.	Godz.	WIG20	X	T_1	T_2	c/p	Cena	Moneyn.	Zmienn. implik.	Vega	Elast.	Wol.
W20F140CDM	2001-05-31	2001-06-15	12	15	13:02	1456,83	140	0,0476	0,0411	1	8,4	0,0464	0,3643	9,8482	0,4279	93
W20G140CDM	2001-05-31	2001-07-18	35	48	13:03	1457,80	140	0,1389	0,1315	1	12	0,0615	0,3277	18,1481	0,4962	69
W20G140CDM	2001-05-31	2001-07-18	35	48	13:07	1458,64	140	0,1389	0,1315	1	12	0,0621	0,3244	18,0599	0,4888	69
W20R140BRE	2001-05-31	2001-06-15	12	15	10:00	1442,13	140	0,0476	0,0411	0	2,5	-0,0362	0,3914	10,6923	1,6755	1
W20R140BRE	2001-05-31	2001-06-15	12	15	10:05	1436,31	140	0,0476	0,0411	0	2,5	-0,0322	0,3741	10,8148	1,6195	499
W20R180BRE	2001-05-31	2001-06-15	12	15	11:00	1449,77	180	0,0476	0,0411	0	33	0,2098	XXXX	XXXX	XXXX	13
W20R180BRE	2001-05-31	2001-06-15	12	15	14:07	1461,86	180	0,0476	0,0411	0	34	0,2015	0,7796	6,2488	0,1444	10
W20U150BRE	2001-05-31	2001-09-21	82	113	13:48	1460,49	150	0,3254	0,3096	0	15	-0,0228	0,5131	32,0188	1,0952	98
W20F150BRE	2001-06-01	2001-06-15	11	14	11:06	1455,10	150	0,0437	0,0384	1	3	-0,0243	0,3901	11,1402	1,4494	200
W20G140CDM	2001-06-01	2001-07-18	34	47	14:43	1460,21	150	0,1349	0,1288	1	12	-0,0063	0,5901	21,0176	1,0335	62
W20R140BRE	2001-06-01	2001-06-15	11	14	11:06	1455,10	140	0,0437	0,0384	0	1,2	-0,0447	0,3095	8,6872	2,2467	409
W20R140BRE	2001-06-01	2001-06-15	11	14	14:07	1452,16	140	0,0437	0,0384	0	2	-0,0427	0,3881	9,6902	1,8831	500
W20R180BRE	2001-06-01	2001-06-15	11	14	14:06	1452,24	180	0,0437	0,0384	0	33,5	0,2085	XXXX	XXXX	XXXX	37
W20R180BRE	2001-06-01	2001-06-15	11	14	14:17	1451,45	180	0,0437	0,0384	0	32	0,2091	XXXX	XXXX	XXXX	10
W20R180BRE	2001-06-01	2001-06-15	11	14	14:44	1460,58	180	0,0437	0,0384	0	32	0,2028	XXXX	XXXX	XXXX	10
W20U150BRE	2001-06-01	2001-09-21	81	112	14:45	1458,96	150	0,3214	0,3068	0	13	-0,0213	0,4505	31,8730	1,1046	50

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4.16: Wartości zmienności implikowanych i zrealizowanych dla horyzontu 1 i 3 miesięcy.

mies.	11 1999	12 1999	01 2000	02 2000	03 2000	04 2000	05 2000	06 2000	07 2000	08 2000	09 2000	10 2000	11 2000	12 2000	01 2001	02 2001	03 2001	04 2001	05 2001	06 2001	07 2001	08 2001	09 2001
ST	22,26	45,60	49,67	62,01	108,66	71,74	63,28	61,00	49,32	48,27	46,60	43,56	53,57	46,08	45,83	40,76	50,79	52,53	47,53	43,36	38,81	48,71	53,44
mLR	22,86	42,18	52,08	63,55	108,68	70,57	62,85	59,51	48,98	47,57	42,10	43,78	52,30	47,52	45,71	40,83	52,07	51,11	47,91	43,82	41,84	50,65	51,68
CM	27,82	52,73	53,05	67,85	108,62	74,02	59,82	61,06	50,82	48,59	42,48	44,20	50,43	42,67	46,77	42,45	32,21	43,84	45,70	40,34	34,45	40,23	42,27
ATM	18,64	49,09	46,20	30,37	111,38	71,39	78,41	68,91	54,24	43,63	36,86	43,38	54,20	45,96	43,18	43,41	51,43	39,93	47,83	59,01	52,17	29,43	42,80
1M	27,24	29,08	39,55	38,17	43,45	41,90	34,86	24,39	16,20	23,67	26,69	39,34	33,42	25,89	23,01	28,11	31,77	29,08	24,85	24,56	34,33	24,09	30,04
3M	31,39	35,26	38,67	43,09	41,13	34,18	25,13	21,58	22,07	30,85	34,15	33,86	27,94	27,24	27,94	30,18	29,29	27,53	28,96	28,38	30,28	32,94	33,90

Źródło: obliczenia własne.

4.4. Szacowanie miary VaR

Zgodnie z tym, co zostało zaprezentowane w rozdziale 1, jedną z grup pomiaru ryzyka stanowią miary zagrożenia, z których najpopularniejsza pozostaje *Value at Risk*. U podstaw rozważań o miarach zagrożenia (przy podejściu opartym na wariancji-kowariancji, bądź na symulacji Monte Carlo) (por. Jorion (2001)) znajduje się dyskusja o modelach opisujących szereg cen lub szereg stóp zwrotu. W niniejszym podrozdziale zaprezentowane zostanie podejście do pomiaru *VaR* wykorzystujące modele z warunkową wartością oczekiwaną oraz z warunkową wariancją. Celem jest wykazanie przydatności tych modeli w szacowaniu *VaR*.

Związek pomiędzy miarą *VaR* i modelami szeregów stóp zwrotu zaprezentowany został w podrozdziale 1.5.2.

Analizie poddany został model *VaR* dla indeksu WIG z okresu od 03-10-1994 (dzień wprowadzenia pięciosesyjnego tygodnia na GPW) do 05-10-2001 (próba o długości 1750 obserwacji). Próbę testową stanowiło ostatnich 750 obserwacji, natomiast początkowe 1000 obserwacji służyło estymacji parametrów.

Jako modele szeregu stóp zwrotu wybrano modele zagnieżdzone w modelu *AR(1)-GARCH(1,1)*. Ze względu na to, że parametry modelu estymowane były jedynie na podstawie 1000 obserwacji, zrezygnowano z modelowania „efektu dźwigni”. Uwzględniono natomiast dwa efekty o najsilniejszym wpływie, a mianowicie efekt autokorelacji oraz efekt skupiania danych, Pełna postać wymagała i tak wyznaczenia 5 parametrów modelu. Odpowiednie testy efektu autokorelacji oraz *GARCH*, uzasadniające wybór klasy modelu, zaprezentowane zostały w pracy Pionteka (por. Piontek (2001)).

Ponieważ weryfikacja modelu *VaR* sprowadza się do analizy informacji o przekroczeniach wielkości *VaR*, może zostać dokonana także na podstawie odpowiedniego modelu stóp zwrotu (por. podrozdział 1.5.2.). Badaniu podlega wtedy równość:

$$P\left(r_t \leq \mu_t + \sqrt{h_t}F^{-1}(\alpha)\right) = \alpha, \quad (4.4)$$

gdzie:

r_t - stopa zwrotu z okresu będącego horyzontem pomiaru *VaR*,

μ_t - warunkowa wartość oczekiwana dla horyzontu, dla którego liczona jest *VaR*,

h_t - warunkowa wariancja stop zwrotu dla horyzontu, dla którego liczona jest *VaR*,

$F^{-1}(\alpha)$ - kwantyl odpowiadający prawdopodobieństwu α dla przyjętego standaryzowanego rozkładu warunkowego stóp zwrotu.

W analizowanym przypadku przyjęto, że warunkowym rozkładem jest najczęściej wykorzystywany rozkład normalny $N(0,1)$. Dla standardowych poziomów tolerancji VaR uzyskuje się następujące wartości kwantyli $F^{-1}(0,05)=-1,65$ oraz $F^{-1}(0,01)=-2,33$.

Na rysunku 4.10 przedstawiono liczbę oraz rozmieszczenie w czasie przekroczeń dziennej wartości VaR dla poszczególnych modeli dla poziomu tolerancji 0,05. Badanie przeprowadzono na próbie testowej o długości 750 stóp zwrotu. Dla każdego dnia dokonywano ponownej estymacji modelu na podstawie ostatnich 1000 obserwacji. Wyznaczano warunkową wariancję oraz warunkową oczekiwaną stopę zwrotu, a następnie sprawdzano, czy $r_t \leq \mu_t - 1,65\sqrt{h_t}$. Jeśli tak, to w danym dniu strata przekraczała VaR przy poziomie tolerancji 0,05. Jedynie dla modelu $AR(0)$ - $GARCH(0,0)$ prognoza stopy zwrotu w kolejnym dniu oraz prognoza odchylenia standardowego dokonywana była na podstawie ostatnich 150 obserwacji. Okno o szerokości 150 obserwacji dobrane zostało eksperymentalnie, aby dla próby uczącej otrzymać jak najlepsze oszacowanie VaR . Oczekiwana liczba przekroczeń wartości VaR dla danej długości próby oraz poziomu tolerancji VaR wynosiła 37,5.

Przekroczenie przez stratę wartości VaR przedstawione zostało na poniższych rysunkach przez pionowy prążek.

Następnie dokonano weryfikacji jakości modeli VaR . Testowanie wsteczne modelu (*backtesting*) jest niezbędną procedurą, aby stwierdzić, czy można stosować w praktyce dany model. Testu dokonuje podmiot, który wdraża dany model. Od wyniku testu zależy również odpowiedni mnożnik przy obliczaniu minimalnych wymogów kapitałowych dla banków zgodnie z rozporządzeniami Komitetu Bazylejskiego. Instytucja wdrażająca swój wewnętrzny system VaR zainteresowana powinna więc być takim wyborem modelu, aby sprawdzał się jak najlepiej. Odpowiedzi na pytania, czy dany model w sposób wystarczająco dobrze mierzy ryzyko udzielają odpowiednie testy. Najprostszym testem jest test liczby przekroczeń (*failure test*) (por. Hass (2001)). Dla danej wielkości próby teoretyczna liczba przekroczeń N ma rozkład dwumianowy. Odpowiednią statystykę testową zaproponował w 1995 roku Kupiec. Ma ona postać:

$$LR_{uc} = -2 \ln [(1-p)^{T-N} p^N] + 2 \ln \left\{ \left[1 - \left(\frac{N}{T} \right)^{T-N} \right] \left(\frac{N}{T} \right)^N \right\}, \quad (4.5)$$

gdzie:

N - liczba przekroczeń VaR ,

T - długość próby testowej,

p - przyjęty poziom tolerancji VaR .

Statystyka LR_{uc} ma rozkład asymptotyczny χ^2 z jednym stopniem swobody.

Rysunek 4.10: Przekroczenia VaR dla modeli zawierających się w modelu $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$

Dla $T=750$, poziomu tolerancji VaR 0,05 oraz poziomu istotności testu 0,05, liczba przekroczeń wyznaczająca obszar niekrytyczny (przyjęcia hipotezy o poprawności modelu) wynosi $27 \leq N \leq 49$ wobec wartości oczekiwanej liczby przekroczeń wynoszącej 37,5. Test liczby przekroczeń nie jest jedynym testem, któremu należy poddać weryfikowany model. Trudno zgodzić się, że model jest poprawny jeśli rzeczywiście w ciągu 750 testowanych dni, liczba przekroczeń wynosi 37 lub 38, ale 15 przekroczeń wystąpiło w ciągu ostatniego miesiąca. Do testu liczby przekroczeń należy dołączyć test sprawdzający, czy przekroczenia są niezależne w czasie. Opracowano różne takie testy, ale największą popularność zdobył test niezależności przekroczeń Kupca LR_{ind} oparty na dwóch testach - teście do pierwszego przekroczenia (*Time until First Failure Test*) oraz teście czasu pomiędzy kolejnymi przekroczeniami (*Time between Failures Test*)

dany wzorem (por. Hass (2001)):

$$LR_{ind} = -2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{\nu_1-1}}{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)^{\nu_1-1}} \right) + \sum_{i=2}^N \left(-2 \ln \left(\frac{p(1-p)^{\nu_i-1}}{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)^{\nu_i-1}} \right) \right), \quad (4.6)$$

$$\hat{p}_i = \frac{1}{\nu_i}, \quad (4.7)$$

gdzie:

ν_1 - czas w dniach do pierwszego przekroczenia,

ν_i - czas w dniach pomiędzy $(i-1)$ -ym i i -tym przekroczeniem.

Statystyka LR_{ind} ma rozkład asymptotyczny χ^2 z N stopniami swobody. Ponieważ statystyki LR_{uc} oraz LR_{ind} są niezależne, zaproponowano również test mieszany LR_{mix} uwzględniający zarówno liczbę przekroczeń oraz czas pomiędzy przekroczeniami:

$$LR_{mix} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi_{N+1}^2 \quad (4.8)$$

Poniżej w tabeli 4.17 przedstawiono wyniki testów dla poszczególnych modeli przy założeniu, że hipotezy testowane są przy poziomie istotności 0,05.

Tabela 4.17: Wyniki testów wstecznych modeli VaR

	AR(0)-GARCH(0,1)		AR(1)-GARCH(0,0)		AR(0)-GARCH(1,1)		AR(1)-GARCH(1,1)	
	<i>LR</i>	<i>CV</i>	<i>LR</i>	<i>CV</i>	<i>LR</i>	<i>CV</i>	<i>LR</i>	<i>CV</i>
LR_{uc}	0,1792	3,8415	3,4148	3,8415	0,0639	3,8415	0,0070	3,8415
LR_{ind}	59,684	49,802	52,226	40,113	28,199	50,998	33,609	53,384
LR_{mix}	59,864	50,998	55,641	41,337	28,263	52,192	33,616	54,384

Źródło: obliczenia własne.

gdzie:

LR - uzyskana wartość statystyki testowej dla danego modelu,

CV - wartość krytyczna testu dla poziomu istotności 0,05.

Zaznaczone zostały wyniki, stanowiące podstawę do odrzucenia hipotezy o poprawności modelu.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że dla żadnego modelu nie ma podstaw do odrzucenia go ze względu na liczbę przekroczeń, jednak testy niezależności nakazują odrzucenie modeli nie uwzględniających efektu *GARCH*.

Najlepsze wyniki uzyskano dla modelu $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$, który uwzględnił zarówno zjawisko autokorelacji stóp zwrotu, jak i skupiania zmienności.

Analogiczne badania można przeprowadzić dla poziomu tolerancji VaR równego 0,01. Miara VaR dla tego poziomu tolerancji niedoszacowuje w sposób systematyczny ryzyko i liczba pojawiających się przekroczeń jest większa od oczekiwanej. Niezbędne staje się wtedy uwzględnienie analogicznych modeli do prezentowanych, jednak z grubszymi od rozkładu normalnego ogonami rozkładów warunkowych.

W dalszej części podrozdziału przedstawiono wyniki odpowiednich badań nad jakością modeli VaR , w których założono, że warunkowe rozkłady stóp zwrotu mogą mieć grubsze ogony niż rozkład normalny.

Dokonano weryfikacji przydatności modeli $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$ z warunkowym rozkładem normalnym, z warunkowym rozkładem GED oraz t-Studenta do szacowania wartości VaR (dla poziomu tolerancji 0,05 i 0,01) dla szeregu indeksu WIG (stopy zwrotu z okresu 16.04.1991-16.05.2002, 2315 obserwacji), indeksu S&P500 (stopy zwrotu z okresu 05.01.1970 - 15.05.2002, 8172 obserwacje) oraz indeksu DJIA (stopy zwrotu z okresu 23.08.1962 - 20.05.2002, 10000 obserwacji). Oprócz indeksu WIG uwzględniono w analizie dwa indeksy giełd zachodnich, dla których możliwe było przeprowadzenie testu dla znacznie większego zbioru obserwacji, co ma znaczenie szczególnie w przypadku poziomu tolerancji VaR równego 0,01.

Raz w miesiącu (co 21 obserwacji) dokonywano ponownej estymacji modelu na podstawie ostatnich 1000, 2000 lub 5000 obserwacji, a następnie wyznaczano warunkową wariancję oraz warunkową oczekiwaną stopę zwrotu dla kolejnych dni miesiąca, oraz sprawdzano, czy występują przekroczenia w sposób analogiczny jak dla wcześniejszego przykładu. Dla rozkładów t-Studenta oraz GED odpowiednie dla poziomu tolerancji modelu VaR kwantyle zależą od liczby stopni swobody. Przykładowo dla standaryzowanego rozkładu t-Studenta i $\nu = 5,81$, $F^{-1}(0,05) = -1,583$ oraz $F^{-1}(0,01) = -2,573$, a dla rozkładu GED i $\nu = 1,259$, $F^{-1}(0,05) = -1,649$ oraz $F^{-1} = -2,612$.

Łącznie rozpatrzono po 21 przypadków dla każdego z dwóch podstawowych poziomów istotności VaR (dla szeregu S&P500 i DJIA estymacja parametrów na podstawie ostatnich 1000, 2000 lub 5000 obserwacji dla trzech analizowanych rozkładów warunkowych oraz dla szeregu WIG estymacja parametrów na podstawie ostatnich 1000 obserwacji również dla 3 analizowanych rozkładów). We wszystkich analizowanych przypadkach niezbędnym było 5286 estymacji modeli.

4.4. Szacowanie miary VaR

W tabeli 4.18 przedstawiono liczbę przekroczeń dziennej wartości VaR dla poszczególnych modeli dla poziomu istotności 0,05 i 0,01.

Tabela 4.18: Liczba przekroczeń *VaR* w modelach z warunkowym rozkładem normalnym, GED i t-Studenta

			$\alpha = 0,05^{(1)}$			$\alpha = 0,01$		
			zaobser. ⁽²⁾	teoret ⁽³⁾	przedział ⁽⁴⁾	zaobser.	teoret	przedział
SP500	1000	N	357	359	322-394	121	72	55-88
		S	386			83		
		G	355			82		
	2000	N	297	309	275-342	101	62	46-77
		S	320			72		
		G	296			66		
	5000	N	141	159	134-182	53	32	20-42
		S	162			37		
		G	140			36		
DJIA	1000	N	450	450	409-490	136	90	71-108
		S	480			104		
		G	447			101		
	2000	N	396	400	361-438	120	88	62-97
		S	430			88		
		G	390			88		
	5000	N	222	250	219-280	75	50	36-64
		S	232			51		
		G	222			50		
WIG	1000	N	68	66	50-81	24	13	6-20
		S	72			15		
		G	67			15		

Źródło: obliczenia własne.

gdzie:

- (1) - poziom tolerancji *VaR*,
- (2) - liczba zaobserwowanych przekroczeń VaR w próbie testowej,
- (3) - liczba teoretycznych przekroczeń przy zadanym poziomie tolerancji i długości próby testowej,
- (4) - liczba przekroczeń wyznaczająca obszar niekrytyczny (przyjęcia hipotezy o poprawności modelu VaR) dla poziomu istotności testu 0,05.

W powyższej tabeli na podstawie testu liczby przekroczeń zaprezentowane zostały przedziały niekrytyczne. Na tej podstawie odrzucić należy wszystkie modele *VaR* dla

poziomu istotności 0,01 i dla warunkowego rozkładu normalnego. Dla analizowanych modeli, które nie zostały odrzucone podczas testu liczby przekroczeń, nie było również podstaw do odrzucenia ze względu na test niezależności przekroczeń.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że dla poziomu tolerancji VaR 0,05 w zupełności wystarczające było modelowanie szeregów stóp zwrotu z indeksów za pomocą modeli $AR(1)$ - $GARCH(1,1)$ z warunkowym rozkładem normalnym, bądź z równie dobrym rozkładem GED (por. Piontek (2002)). Model z warunkowym rozkładem t-Studenta w sposób systematyczny niedoszacowywał ryzyko i liczba pojawiających się przekroczeń była większa od oczekiwanej. Pozornie przeczy to znanej własności, że rozkład t-Studenta posiada grubsze ogony od rozkładu normalnego. Należy jednak uwzględnić, że rozpatrywany był odpowiednio przekształcony rozkład t-Studenta o jednostkowej wariancji. Efekt grubego ogona rozkładu t-Studenta ujawnia się dopiero przy poziomie tolerancji VaR równym 0,01. Przy tym poziomie istotności warunkowy rozkład normalny nie sprawdza się, zaniżając w sposób systematyczny ryzyko. Dużo lepsze wyniki osiąga się natomiast dla rozkładu GED i t-Studenta. Ogólnie można zauważyć, że rozkład GED jest praktycznie tak samo dobry jak rozkład normalny dla poziomu istotności 0,05 oraz tak samo dobry jak rozkład t-Studenta dla poziomu istotności 0,01. **W tym przypadku proponuje się używać w procesie pomiaru VaR modeli z warunkowym rozkładem GED.** Jednak także w przypadku poziomu istotności 0,01 ogony rozkładów t-Studenta i GED nie są wystarczająco grube, gdyż liczba przekroczeń jest większa od oczekiwanej. Poprawy uzyskanych efektów można oczekiwać, jeśli uwzględni się dodatkowo skośność rozkładów warunkowych (np. poprzez zastosowanie skośnego rozkładu t-Studenta) lub „efekt dźwigni” (np. poprzez model $GJR-GARCH$). Możliwe jest zaniechanie modelowania całości rozkładu warunkowego na rzecz jedynie jego ogonów. Podejście takie zaprezentowane zostało w pracy McNeila, gdzie połączono teorię modeli heteroskedastycznych z teorią wartości ekstremalnych (por. McNeil (2000)).

4.5. Wycena opcji w modelu uwzględniającym efekt *AR-GARCH*

Black i Scholes przy współudziale Mertona wyznaczyli wzór na wartość europejskiej opcji kupna oraz sprzedaży. Założyli oni jednak, że ceny instrumentu bazowego zmieniają się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna, którego parametry

są stałe. To nierealistyczne założenie powoduje, że w pewnych przypadkach, teoretyczne wartości uzyskane z modelu Blacka-Scholesa odbiegają od cen obserwowanych w rzeczywistości i model cechuje się obciążeniem. W przypadku, gdyby model Blacka-Scholesa wyceniał opcje prawidłowo, to zmienność implikowana powinna mieć stałą wartość niezależną od współczynnika *moneyness* opcji oraz niezależną od terminu do wygaśnięcia opcji. Obserwowana powinna być więc płaska płaszczyzna zmienności implikowanej (zgodnie z rozważaniami z rozdziału trzeciego). Rzeczywista płaszczyzna zmienności charakteryzuje się efektem „uśmiechu zmienności”, czyli zależnością zmienności implikowanej od wartości współczynnika *moneyness*. Kształt „uśmiechu zmienności” zależy od siły efektu dźwigni w szeregu stóp zwrotu instrumentu bazowego, czyli wielkości asymetrii w reakcji inwestorów na dopływające do rynku wiadomości dobre i złe. W przypadku braku efektu dźwigni, „uśmiech zmienności” przyjmuje kształt litery „U” z minimalną wartością dla opcji *at-the-money*. Efekt dźwigni powoduje asymetrię w „uśmiechu zmienności”, który nazywany jest wtedy „grymasem zmienności”. Wraz ze wzrostem terminu do wygaśnięcia, kształt „uśmiechu” lub „grymasu zmienności” staje się bardziej płaski.

Dodatkowo wraz ze wzrostem terminu do wygaśnięcia obserwuje się często wzrost lub spadek zmienności implikowanej dla opcji o tym samym współczynniku *moneyness*. Efekt ten nazywa się „strukturą czasową zmienności implikowanej”. Związany jest on z faktem, że po okresie szczególnie niskiej lub wysokiej zmienności, obserwuje się powrót do poziomu średniego. Jeśli analizuje się okres, gdy zmienność jest niższa od poziomu średniego, spodziewany jest wzrost zmienności i powrót do długoterminowego poziomu średniego, co objawia się rosnącą strukturą terminową zmienności implikowanych.

W podrozdziale tym zaprezentowane zostanie podejście umożliwiające wycenę europejskiej opcji kupna² z uwzględnieniem zaprezentowanych w rozdziale 2 własności szeregów stóp zwrotu takich jak autokorelacja, skupianie zmienności, efekt dźwigni. Dokonana zostanie wycena europejskich opcji kupna dla różnych współczynników *moneyness* oraz dla różnych terminów do wygaśnięcia wystawionych na jednostkę indeksu WIG. W modelu wyceny wykorzystany zostanie model *AR(1)-GJR-GARCH(1,1)*. Na podstawie uzyskanych wartości opcji wyznaczona zostanie implikowana płaszczyzna zmienności dla modelu Blacka-Scholesa. Uzyskanie charak-

²Opcje sprzedaży można wycenić analogicznie lub poprzez parytet kupna-sprzedaży (por. Hull (1999)).

terystycznych efektów „uśmiechu zmienności”, „struktury czasowej zmienności” oraz zgodność zmienności implikowanej dla opcji *at-the-money* o długim terminie do wygaśnięcia z długoterminową zmiennością szeregu stóp zwrotu, świadczyć będzie o tym, iż prezentowany model umożliwi lepsze, niż model Blacka-Scholesa, uwzględnienie obserwowanych na rynku własności cen opcji. Niestety jest to argument nie wprost. Brak rzetelnych i kompletnych danych o cenach i parametrach opcji wystawianych na rynku pozagiełdowym oraz niska płynność warrantów (wraz z brakiem możliwości dokonania krótkiej sprzedaży warrantu) na rynku giełdowym w Polsce, uniemożliwiają skuteczne porównanie wartości uzyskiwanych z modelu z cenami rzeczywistymi. Prezentowane zagadnienia pozostaną więc w sferze przykładu ilustracyjnego.

Omawiane w dalszej części podrozdziału podejście zaproponowane zostało przez Duana przy założeniu, że szereg stóp zwrotu z instrumentu bazowego opisywany jest modelem GARCH-M(1,1) (por. Duan (1996)). Zostało ono jednak szybko uogólnione na inne postaci warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji (por. Schmitt (1996), Hafner, Herwartz (1999), Härdle, Hafner(2000)). Podejście to jest uogólnieniem tradycyjnej metody wyceny przy neutralnym podejściu do ryzyka (*risk neutral valuation*) (por. Weron i Weron (1998), Hull (1999)) w przypadku modeli z warunkową wartością oczekiwaną oraz warunkową wariancją i polega na takiej modyfikacji procesu stóp zwrotu, by dla każdej chwili, warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu była równa stopie wolnej od ryzyka. Równoważne jest to temu, iż zdyskontowana przy stopie wolnej od ryzyka cena instrumentu bazowego jest martyngałem (por. np. Weron i Wron (1998)). Parametr modyfikujący proces stóp zwrotu nie jest stały w czasie, co spowodowało, że w odróżnieniu od modelu wyceny przy braku arbitrażu dla modelu geometrycznego ruchu Browna, podejście to nazwane zostało **wyceną przy punktowej własności neutralności wobec ryzyka** (*Locally Risk-Neutral Valuation Relationship - LRNVR*). Także w tym przypadku wprowadza się pojęcia **miary P**, dla procesu nieprzekształconego oraz **arbitrażowej miary Q**, względem której zdyskontowany proces cen instrumentu bazowego jest martyngałem.

Uwzględnienie zmiennej w czasie wariancji powoduje, tzw. „niezupełność rynku” (*incompleteness of market*) oraz istnienie w ogólności wielu możliwych miar Q, dla których spełnione jest założenie braku arbitrażu (por. Harrison, Pliska (1983), Weron i Weron (1998)). Niezbędne staje się założenie o preferencjach inwestora względem ryzyka i postaci funkcji użyteczności. Duan wykazał, że dla pewnych szerokich klas funkcji użyteczności, którymi może charakteryzować się inwestor, wartość opcji

uzyskana z tego modelu jest wartością maksymalizującą oczekiwaną użyteczność inwestora i staje się dla niego ceną sprawiedliwą (por. Duan (1995)).

Zgodnie z wynikiem badań nad modelowaniem szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG z podrozdziału 4.1. do dalszej analizy przyjęto model *AR(1)-GJR-GARCH(1,1)*. Odpowiednie postaci modelu względem miary P i Q dane są poniżej (por. Hafner, Herwartz (1999))³:

$$\text{miara P} \quad \begin{cases} y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} - 0.5h_t + \sqrt{h_t} z_t, \\ z_t \sim N(0, 1), \\ h_t = \omega + [(\alpha_1 + \alpha_1^- \mathbb{I}_{(z_{t-1} < 0)}) z_{t-1}^2 + \beta_1] h_{t-1}^2, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{miara Q} \quad \begin{cases} y_t = r_1 - 0.5h_t + \sqrt{h_t} \eta_t, \\ \eta_t \sim N(0, 1), \\ h_t = \omega + [(\alpha_1 + \alpha_1^- \mathbb{I}_{(\eta_{t-1} - \lambda_{t-1})}) (\eta_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 + \beta_1] h_{t-1}^2, \\ \lambda_t = \frac{\mu + \phi_1 y_{t-1} - r_1}{\sqrt{h_t}}, \end{cases} \quad (4.10)$$

gdzie:

y_t - logarytmiczna stopa zwrotu z instrumentu bazowego z okresu $[t-1, t]$ ⁴,

r_1 - stopa wolna od ryzyka w horyzoncie, dla którego wyznaczane są stopy zwrotu.

Wycena opcji dla chwili $t = t_0$ oparta jest na procedurze Monte Carlo, której przebieg jest następujący:

1. **Estymacja parametrów procesu stóp zwrotu względem miary P.** Niezbędna jest też informacja o wartości warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji w chwili t_0 . Wielkości te decydują o „warunku początkowym” podczas generowanie zbioru trajektorii procesu w etapie 2.
2. **Wygenerowanie m trajektorii szeregu cen instrumentu bazowego o długości n względem miary Q.** Wartość n , to liczba podokresów równych horyzontowi stóp zwrotu do wygaśnięcia opcji. Ponieważ najczęściej analizuje się

³Pojawienie się składnika „ $-0,5h_t$ ” związane jest z faktem, iż rozpatrywane są logarytmiczne stopy zwrotu (por. lemat Itô).

⁴Zaproponowano odmienne od wcześniejszego oznaczenie, by uniknąć podobieństwa z oznaczeniem stopy wolnej od ryzyka.

szeregi dziennych stóp zwrotu, to n oznacza liczbę dni (sesyjnych) do wygaśnięcia opcji. Cenę po n dniach, czyli w momencie wygaśnięcia opcji dla i -tej trajektorii uzyskuje się w oparciu o wzory (4.10) oraz o zależność:

$$S_{i,n} = S_{t_0} \exp \left(nr_1 - 0.5 \sum_{s=1}^n h_{i,t_0+s} + \sum_{s=1}^n \eta_{i,t_0+s} \right). \quad (4.11)$$

W etapie tym wykorzystuje się również typowe procedury poprawy własności metody Monte Carlo. W celu poprawy zbieżności procedury, wykorzystano „technikę odbić lustrzanych” (*antithetic variate method*). Polega ona na dwukrotnym wykorzystaniu każdego szeregu zaburzeń η_t , ale po raz drugi ze znakiem przeciwnym. Poprawę jakości wyceny uzyskuje się również poprzez wykorzystanie procedury „empirycznej symulacji martynałów” zaproponowanej przez Duana i Simonato, której celem jest poprawa własności martyngałowej w szeregu zdyskontowanych cen instrumentu bazowego (por. Duan, Simonato (1998), Duan, Gauthier, Simonato (1999)):

$$S_{i,n}^* = S_{t_0} \exp(r_1 n) \frac{S_{i,n}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m S_{i,n}}. \quad (4.12)$$

3. Wycena europejskiej opcji kupna. Wartość opcji równa jest wartości oczekiwanej (względem miary Q) zdyskontowanej wartości wypłaty opcji. Europejska opcja kupna w chwili wykonania związana jest z wypłatą równą $\max[S_T - X, 0]$, gdzie S_T to cena instrumentu bazowego w chwili wygaśnięcia (rozliczania) opcji, a X , to cena wykonania opcji. Wartość oczekiwaną przybliża się średnią arytmetyczną wartości wypłat związanych z każdą wygenerowaną trajektorią. Ostatecznie wartość opcji kupna, która wygasa za n dni, dana jest wzorem:

$$c_{t_0} = \exp(-nr_1) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\max(S_{i,n}^* - X), 0]. \quad (4.13)$$

Poniżej przedstawiono wyniki wyceny hipotetycznej europejskiej opcji kupna wystawionej na jednostkę indeksu WIG. Dniem, dla którego dokonywano wyceny był dzień 15-05-2002. Wartość indeksu w tym dniu wynosiła 15475,75. Stopę wolną od ryzyka w skali roku przyjęto na poziomie 10%. Parametry modelu stóp zwrotu względem miary P wyestymowane zostały na podstawie 1900 obserwacji poprzedzających dzień wyceny.

Uzyskane parametry przedstawione zostały w poniższej tabeli.

Tabela 4.19: Parametry modelu dla indeksu WIG względem miary P

Parametr	Wartość
μ	5,3E-05
ϕ_1	0,189
ω	1,79E-0.5
α_1	0,11
α_1^-	0,068
β_1	0,798

Źródło: obliczenia własne.

Długoterminowa zmienność stóp zwrotu w skali roku, uzyskana na podstawie modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1) wynosiła 28,4%⁵

W dniu wyceny, warunkowa zmienność w skali roku (wyznaczona na podstawie wartości warunkowej wariancji) wynosiła 17,66%. Dokonano wyceny opcji dla 17 wartości współczynnika *moneyness* z przedziału [0,8;1,2] oraz dla terminów do wygaśnięcia opcji od 1 do 6 miesięcy. Uzyskane wartości opcji prezentuje tabela 4.20.

Analiza wyników na podstawie uzyskanych wartości opcji jest trudna. Znacznie łatwiejsza jest analiza własności wyceny modelu na podstawie uzyskanej dla tych wartości płaszczyzny zmienności implikowanej wynikającej z odwrócenia modelu Blacka-Scholesa. Uzyskane wartości zmienności implikowanej dla różnych terminów do wygaśnięcia opcji oraz dla różnych wartości współczynnika *moneyness* prezentuje tabela 4.21. W celu łatwiejszej interpretacji, wartości zmienności implikowanej zaprezentowano na rysunkach 4.11 oraz 4.12. Rysunek 4.11 prezentuje całą płaszczyznę zmienności, natomiast rysunek 4.12 prezentuje przekrój przez płaszczyznę zmienności jedynie dla opcji będących *in-the-money*.

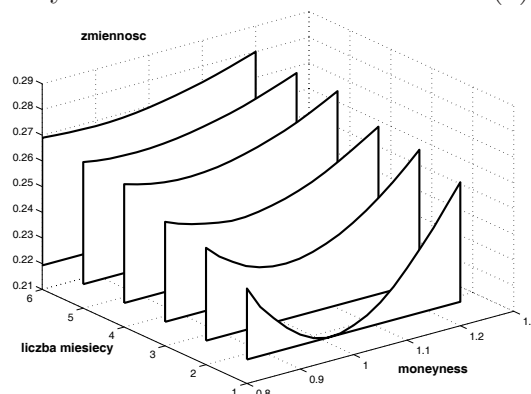
Rysunek 4.11 potwierdza występowanie typowego efektu „uśmiechu zmienności”. „Uśmiech” ten jest asymetryczny, co spowodowane jest niezerową wartością współczynników α_1^- oraz ϕ_1 . Autokorelacja stóp zwrotu wpływa również na przesunięcie mi-

⁵Długoterminowa, bezwarunkowa wariancja stóp zwrotu wyznaczona została ze wzoru:

$$V = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - 0,5\alpha_1^- - \beta} \frac{1}{1 - \phi_1^2} \quad (4.14)$$

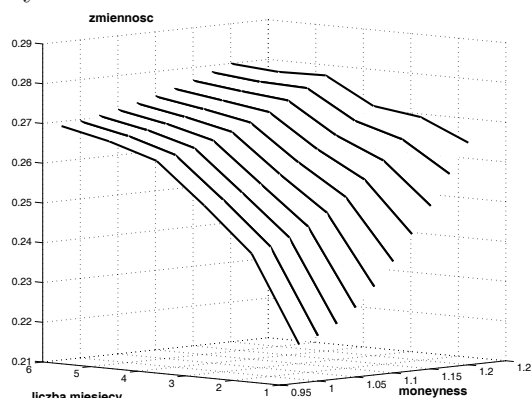
nimalnej wartości zmienności implikowanej dla poszczególnych terminów do wykupu w kierunku mniejszych wartości współczynnika *moneyness*. Zgodnie z oczekiwaniami, „uśmiechy zmienności” stają się coraz bardziej płaskie wraz ze wzrostem terminów do wykupu. Na obu rysunkach obserwuje się również rosnącą „strukturę czasową zmienności implikowanej” wraz ze wzrostem terminu do wygaśnięcia. Spowodowane jest to tym, że warunkowa wariancja w chwili wyceny opcji była poniżej długoterminowego poziomu średniego, a wykorzystywany model *GARCH* cechuje się powrotem do średniej. Dokonano również wyceny opcji dla rocznego terminu do wykupu. Uzyskano praktycznie płaski „uśmiech zmienności”. Wartość zmienności implikowanej równa była w przybliżeniu długoterminowej zmienności szeregu stóp zwrotu w skali roku.

Rysunek 4.11: Płaszczyzna zmienności dla modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4.12: Struktury czasowe zmienności dla modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)



Źródło: opracowanie własne.

Zaprezentowane własności modelu wyceny opcji są argumentem nie wprost na to, że model uwzględniający efekt autokorelacji, skupiania zmienności oraz dźwigni, powinien prowadzić do wyceny opcji bliższej cenom rynkowym. Wniosek ten potwierdzony został dla instrumentów pochodnych z rynku niemieckiego (por. Hafner, Herwartz (1999)).

Dalszej poprawy modelu można oczekiwać po uwzględnieniu bardziej skomplikowanych modeli warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowej wariancji oraz grubszych od rozkładu normalnego warunkowych rozkładów stóp zwrotu. Odpowiednia procedura wyceny z uwzględnieniem warunkowych rozkładów z grubymi ogonami przedstawiona została przez Duana w 1999 roku (por. Duan (1999)).

Tabela 4.20: Wartości opcji kupna na jednostkę indeksu WIG dla modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)

ceny europejskich opcji kupna																	
il. mies.	współczynnik moneyness																
	0,800	0,825	0,850	0,875	0,900	0,925	0,950	0,975	1,000	1,025	1,050	1,075	1,100	1,125	1,150	1,175	1,200
1	0,31	0,93	2,94	8,36	22,60	54,64	118,73	229,26	394,59	611,31	868,74	1151,56	1445,52	1740,26	2029,89	2311,32	2583,15
2	10,53	20,28	38,39	68,89	118,42	193,19	298,61	437,93	611,46	815,80	1045,21	1293,82	1554,04	1820,45	2087,63	2352,65	2612,40
3	38,08	63,62	102,01	157,12	232,20	330,34	454,96	606,04	781,74	979,42	1195,83	1426,48	1667,66	1915,03	2164,88	2414,26	2661,01
4	85,91	128,17	184,99	259,29	353,10	467,96	604,34	761,46	938,09	1131,90	1339,79	1558,84	1786,08	2019,06	2255,13	2491,66	2726,80
5	136,69	192,26	263,47	351,86	458,05	582,82	726,01	886,54	1063,17	1253,42	1455,43	1666,42	1884,69	2107,91	2334,07	2560,70	2786,71
6	194,58	262,39	345,05	443,66	558,21	689,48	836,69	999,23	1230,97	1363,17	1560,85	1766,42	1977,88	2193,52	2411,94	2630,98	2849,56

Źródło: obliczenia własne

Tabela 4.21: Płaszczyzna zmienności implikowanej dla wartości opcji z modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)

płaszczyzna zmienności																	
il. mies.	współczynnik moneyness																
	0,800	0,825	0,850	0,875	0,900	0,925	0,950	0,975	1,000	1,025	1,050	1,075	1,100	1,125	1,150	1,175	1,200
1	24,70	23,84	23,27	22,75	22,34	22,06	21,93	21,97	22,14	22,39	22,75	23,22	23,80	24,40	25,10	25,85	26,59
2	25,55	25,07	24,72	24,42	24,23	24,12	24,09	24,14	24,26	24,44	24,67	24,97	25,31	25,70	26,13	26,61	27,12
3	25,83	25,61	25,46	25,33	25,23	25,16	25,17	25,23	25,33	25,46	25,63	25,83	26,07	26,35	26,65	26,97	27,28
4	26,56	26,41	26,29	26,21	26,16	26,15	26,19	26,24	26,34	26,46	26,60	26,77	26,95	27,16	27,40	27,66	27,93
5	26,69	26,60	26,54	26,52	26,51	26,52	26,56	26,62	26,70	26,80	26,91	27,03	27,18	27,34	27,52	27,71	27,90
6	26,90	26,86	26,82	26,81	26,79	26,80	26,83	26,88	26,95	27,04	27,14	27,25	27,38	27,52	27,67	27,83	28,00

Źródło: obliczenia własne.

Zakończenie

Celem pracy było dokonanie przeglądu nowoczesnych metod modelowania zmienności stóp zwrotu oraz prognozowania parametru zmienności, przede wszystkim dla cen akcji, towarów oraz kursów walut.

W rozdziale pierwszym przyjęto definicję pojęcia ryzyka rynkowego oraz przedstawiono możliwe koncepcje jego pomiaru. Spośród miar ryzyka rynkowego skupiono się na miarach zmienności wybierając jako oszacowanie zmienności instrumentów finansowych odchylenie standardowe stóp zwrotu. Zaprezentowane zostały obszary współczesnej teorii finansów, w których niezbędna jest wiedza o poziomie zmienności.

Kolejnym etapem było przedstawienie w rozdziale drugim podstawowych koncepcji modelowania zmian cen za pomocą modeli z czasem ciągłym oraz z czasem dyskretnym. Przyjęto ostatecznie prosty model stóp zwrotu, który w dalszej części rozdziału drugiego był konsekwentnie uogólniany. Uogólnienia te skupiały się wokół:

- postaci rozkładu warunkowego reszt modelu. Zaprezentowano najpopularniejsze stosowane rozkłady warunkowe, zarówno te symetryczne, jak i niesymetryczne oraz te o skończonej, jak i nieskończonej wariancji. Wyeksponowane zostały zyskujące na znaczeniu rozkłady o grubych ogonach, a mianowicie rozkład GED, t-Studenta oraz skośny t-Studenta.
- postaci warunkowej wartości oczekiwanej procesu. Przyjęcie określonego modelu umożliwia opis obserwowanych w rzeczywistych szeregach czasowych autokorelacji stóp zwrotu. Przedstawiono różne modele umożliwiające opis krótkiej oraz długiej pamięci procesów.
- postaci modelu warunkowej wariancji procesu. Główny nacisk położony został na bogatą klasę modeli deterministycznych - klasę *GARCH*. Modele te umożliwiają opis efektu skupiania danych, grubych ogonów, „efektu dźwigni” oraz długiej pamięci w szeregach zmienności.

Tylko łączne dobranie odpowiedniego rozkładu reszt, modelu warunkowej wartości oczekiwanej oraz warunkowej wariancji gwarantuje dobre własności modelu oraz dopasowanie do danych empirycznych.

W rozdziale trzecim przedstawione zostały techniki prognozowania zmienności. Zaprezentowano zarówno techniki oparte na szeregach czasowych, ze szczególnym uwzględnieniem możliwości prognozowania zmienności przy pomocy modeli klasy *GARCH* oraz techniki oparte na oczekiwaniach rynku. Zaprezentowano metody wyznaczania zmienności implikowanej oraz następnie agregacji informacji z różnych instrumentów wystawionych na ten sam instrument bazowy, w jeden łączny parametr zmienności. Rozważania o prognozowaniu zmienności zakończone zostały przedstawieniem miar umożliwiających ocenę błędów prognoz, zarówno tych symetrycznych, jak i tych niesymetrycznych oraz efektywności prognoz.

W rozdziale czwartym zaprezentowane zostały wyniki badań empirycznych modelowania oraz prognozowania zmienności dla indeksu WIG, kursu dolara oraz cen miedzi. Na podstawie kryterium Akaike'a wybrane zostały optymalne postaci modeli. W szeregu stóp zwrotu z indeksu WIG potwierdzony został efekt autokorelacji, skupiania zmienności oraz dźwigni. Efektu dźwigni nie stwierdzono w szeregach kursu dolara oraz cen miedzi. Dodatkowo w szeregu stóp zwrotu z kursów dolara nie stwierdzono efektu autokorelacji. Dla wszystkich analizowanych instrumentów stwierdzono konieczność uwzględnienia grubych ogonów rozkładów warunkowych.

Na podstawie badań nad możliwością prognozowania zmienności instrumentów, stwierdzono, że w przypadku prognoz opartych na szeregach czasowych, proste metody wykorzystujące średnią ruchomą obarczone są mniejszym błędem *ex post* niż prognozy uzyskane za pomocą modeli *GARCH* dla indeksu WIG oraz miedzi. Jedynie w przypadku prognoz zmienności stóp zwrotu z kursów dolara uzyskano przewagę metod opartych na modelach *GARCH*.

Prognozy zmienności oparte na oczekiwaniach rynku potwierdziły, iż polskie warianty wyceniane są znacznie powyżej wartości wynikającej z modelu teoretycznego. Uzyskane prognozy były silnie zawyżone i cechowały się większymi błędami *ex post* niż prognozy uzyskiwane na podstawie szeregów czasowych.

Ostatnie dwa przykłady empiryczne dotyczyły wykorzystania modeli klasy *GARCH* w zakresie pomiaru ryzyka metodą *VaR* oraz wyceny opcji. Na podstawie testów liczby przekroczeń oraz niezależności przekroczeń, wykazano przydatność modeli z warunkową wartością oczekiwaną, warunkową wariancją oraz z grubymi ogonami reszt

w procesie pomiaru ryzyka metodą *VaR*. Stwierdzono, że już proste modele $AR(1)$ – $GARCH(1, 1)$ umożliwiają znaczną poprawę jakości modelu *VaR*. Najlepsze wyniki uzyskano dla modeli z warunkowym rozkładem GED.

Rozważania zakończył przykład wyceny hipotetycznej, europejskiej opcji kupna na jednostkę indeksu WIG. Zaprezentowano, iż model ten tworzy obserwowane na rynku efekty „uśmiechu zmienności” oraz struktury czasowej zmienności implikowanej. Także w tym przypadku potwierdzono przydatność modelu wyceny opcji uwzględniającego efekty autokorelacji, skupiania zmienności oraz „dźwigni”.

Literatura

- [1] K. Adjaoute, M. Braund, R. Gibson-Asner. (1998). On the predictability of the stock market volatility: does history matter? *European Financial Management*, 4(3), str. 293–319.
- [2] V. Akgiray. (1989). Conditional heteroskedasticity in time series of stock returns: Evidence and forecasts. *Journal of Business*, 62, str. 55–80.
- [3] V. Akgiray, C. Booth. (1988). The stable-law model of stock returns. *Journal of Business and Economic Statistics*, 6, str. 51–57.
- [4] L. Alles, J. Kling. (1994). Regularities in the Variation of Skewness in Asset Returns. *Journal of Financial Research*, 17, str. 427–438.
- [5] T. Andersen, Y. Bollerslev. (1997). Answering the critics: Yes, ARCH models do provide good volatility forecasts. *NBER Working Paper 6023*. <http://papers.nber.org/papers/W6023>.
- [6] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, D. Heath. (1998). Coherent measures of risk. citeseer.nj.nec.com/artzner98coherent.html.
- [7] R. Baillie, T. Bollerslev, H. Mikkelsen. (1996). Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74, str. 3–30.
- [8] E. Balaban. (1999). Forecasting emerging stock market volatility. *Central Bank of the Republic of Turkey, Ankara*.
- [9] D. Bates. (1996). Testing Option Pricing Models. *w: G.Maddala, R. Rao, Statistical Methods in Finance, Elsevier, Amsterdam*, str. 567–611. <http://www.biz.uiowa.edu/faculty/dbates/>.

- [10] D. Bates. (2002). Empirical Option Pricing: A Retrospection. (*złożone do druku w Journal of Econometrics*). <http://www.biz.uiowa.edu/faculty/dbates/>.
- [11] C. Bauer. (2000). Value at Risk and Hyperbolic Distributions. *Journal of Economics and Business*, 52, str. 455–467.
- [12] S. Beckers. (1981). Standard deviations implied in option prices as predictors of future stock price variability. *Journal of Banking and Finance*, 5, str. 363–381.
- [13] A. Belkema, L. de Haan. (1974). Residual life time at great age. *Ann. Probab.*, 2, str. 792–804.
- [14] Y. Bensalah. (2000). Steps in Applying Extreme Value Theory to Finance: A Review. *Bank of Canada*, Working Paper 2000-20.
- [15] A. Bera, M. Higgins. (1995). *On ARCH models: properties, estimating and testing (w: Exley, Roberts, Sawyer, Surveys in Econometrics)*. Basil Blackwell, Oxford.
- [16] K. Bera, M. Higgins. (1992). A class of nonlinear ARCH models. *International Economic Review*, 33, str. 137–158.
- [17] P. Bernstein. (1997). *Przeciw Bogom. Niezwykłe dzieje ryzyka*. WIG-PRESS, Warszawa.
- [18] P. Best. (2000). *Wartość narażona na ryzyko*. Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- [19] J. Bizon-Górecka. (2000). Źródła ryzyka finansowego w organizacji gospodarczej. w: W. Tarczyński (red.), *Rynek kapitałowy - Skuteczne inwestowanie*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin, str. 439–448.
- [20] F. Black. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3, str. 167–179.
- [21] F. Black, M. Scholes. (1973). The Pricing Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, str. 637–654.
- [22] C. Blanco, D. Sornow. (2000). Mean Reverting Processes - Energy Price Processes Used For Derivatives Pricing & Risk Management. *Commodities Now*, 3, str. 68–72.

- [23] E. Bogacka-Kisiel, D. Korenik, L. Nadotti. (1998). *Podstawy zarządzania finansami banku komercyjnego*. Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław.
- [24] T. Bollerslev. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, str. 307–327.
- [25] T. Bollerslev, R. Chou, K. Kroner. (1992). ARCH modeling in finance. A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, str. 5–59.
- [26] T. Bollerslev, R. Engle, D. Nelson. (1994). *ARCH models (w: Engle, MacFadden (red.), Handbook of econometrics)*. North-Holland, Amsterdam.
- [27] T. Bollerslev, H. Mikkelsen. (1996). Modeling and pricing long-memory in stock market volatility. *Journal of Econometrics*, 73, str. 151–184.
- [28] S. Bond. (2001). A review of asymmetric conditional density functions in autoregressive conditional heteroskedasticity models. *w: Knight, Satchell (red.), Return distributions in Finance, Butterworth-Heinemann, Oxford*, str. 21–46.
- [29] G. Box, J. Jenkins. (1983). *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- [30] P. Boyle. (1986). Option Valuation Using a Three Jump Process. *International Options Journal*, 3, str. 7–12.
- [31] B. Bradley, M. Taqqu. (2000). Financial Risk and Heavy Tails. (*w: Heavy-tailed distributions in Finance*), North Holland.
- [32] T. Brailsford, R. Faff. (1996). An evaluation of forecasting techniques. *Journal of Banking and Finance*, 20, str. 419–438.
- [33] M. Brenner, M. Subrahmanyam. (1988). A Simple Solution to Compute The Implied Standard Deviation. *Financial Analysts Journal*, str. 80–83.
- [34] R. Brenner, R. Harjes, K. Kroner. (1996). Another Look at Models of the Short-Term Interest Rate. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, str. 85–107.
- [35] K. Burnecki. (1998). *Self-similar models in risk theory*. Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska. (praca doktorska).

- [36] J. Cambell, L. Hentschel. (1992). No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns. *Journal of Financial Economics*, 31, str. 281–318.
- [37] J. Cambell, A. Lo, A. MacKinlay. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, New Jersey.
- [38] K. Chan, G. Karolyi, F. Longstaff, A. Sanders. (1992). An empirical comparison of alternative models of short-term interest rate. *Journal of Finance*, 52(1), str. 1209–1227.
- [39] D. Chiras, S. Manaster. (1978). The information content of option prices and a test of market efficiency. *Journal of Financial Economics*, 6, str. 213–234.
- [40] A. Christie. (1982). The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, 10, str. 407–432.
- [41] P. Christoffersen, F. Diebold. (1997). How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management? www.ssc.upenn.edu/~diebold/.
- [42] M. Cieślak. (2000). *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [43] K. Connolly. (1999). *Buying and selling volatility*. Willey & Sons, New York.
- [44] C. Corrado, T. Miller. (1996). A Note on a Simple, Accurate Formula to Compute Implied Standard Deviations. *Journal of Banking and Finance*, 20, str. 593–603.
- [45] J. Cox. (1975). Notes on option pricing: constant elasticity of variance diffusions. Stanford University.
- [46] J. Cox, J. Ingersoll, S. Ross. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2), str. 385–407.
- [47] J. Cox, S. Ross. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3, str. 145–166.
- [48] J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7, str. 229–263.

- [49] V. Cvsa, P. Ritchken. (2000). Pricing Climbs under GARCH-Level Dependent Interest Rate Processes. <http://www.weatherhead.cwru.edu/ritchken/>.
- [50] J. Czekaj, M. Woś, J. Żarnowski. (2001). *Efektywność giełdowego rynku akcji w Polsce*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [51] Z. Czerwiński. (1982). *Matematyczne modelowanie procesów ekonomicznych*. Wydawnictwo PWN.
- [52] S. Das, N. Sarkar. (2000). An ARCH in the nonlinear mean (ARCH-NM) model. *The Indian Journal of Statistics*, 62, str. 327–344.
- [53] S. Das, R. Sundaram. (1999). Of Smiles and Smirks: A Term Structure Perspective. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34(2), str. 211–239.
- [54] A. Dekkers, J. Einmahl, L. de Haan. (1989). A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Statistics*, 17, str. 1833–1855.
- [55] F. Diebold, J. Lopez. (1995). *Modelling volatility dynamics (w: Hoover (red.), Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects)*.
- [56] E. Dimson, P. Marsh. (1990). Volatility forecasting without data-snooping. *Journal of Banking and Finance*, 14, str. 399–421.
- [57] J. Duan. (1995). The GARCH Option Pricing Model. *Mathematical Finance*, 5, str. 13–32.
- [58] J. Duan. (1999). Conditionally fat-tailed distributions and the volatility smile in option. Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology.
- [59] J. Duan, G. Gauthier, J. Simonato. (1999). Fast Valuation of Derivative Contracts by Simulation.
- [60] J. Duan, J. Simonato. (1998). Empirical Martingale Simulation for Asset prices. *Management Science*, 44, str. 1218–1233.
- [61] B. Dumas, J. Fleming, R. Whaley. (1998). Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *The Journals of Finance*, LIII, str. 2059–2106.
- [62] D. Dziawgo. (1998). *Credit-rating. Ryzyko i obligacje na międzynarodowym rynku finansowym*. PWN, Warszawa.

- [63] E. Eberlein, U. Keller. (1995). Hyperbolic Distributions in Finance. *Universität Freiburg*.
- [64] E. Eberlein, K. Prause. (2001). The Generalized Hyperbolic Model: Financial Derivatives and Risk Measures. <http://symposium.wiwi.uni-karlsruhe.de/8thpapers/eberlein.ps>.
- [65] L. Ederington, W. Guan. (1999). Forecasting Volatility. <http://papers.ssrn.com>.
- [66] L. Ederington, W. Guan. (2000). Measuring Implied Volatility: Is an Average Better? <http://papers.ssrn.com>.
- [67] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.
- [68] R. Engle. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, 50, str. 987–1008.
- [69] R. Engle. (1990). Discussion: stock market volatility and the crash of 87. *Review of Financial Studies*, 3, str. 103–106.
- [70] R. Engle, T. Bollerslev. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5, str. 1–50.
- [71] R. Engle, V. Ng. (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48, str. 1749–1778.
- [72] R. Engle, A. Patton. (2001). What good is a volatility model? <http://econ.ucsd.edu/apatton/>.
- [73] E. Fama. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *Journal of Business*, 36, str. 420–429.
- [74] E. Fama. (1965). The Behaviour of Stock Market Prices. *Journal of Business*, 38, str. 34–105.
- [75] S. Feinstein. (1988). A source of unbiased implied volatility forecasts. *Working Papers of Federal Reserve Bank of Atlanta*, 88-9.
- [76] M. Ferreira. (1999). Forecasting Interest Rate Volatility from the Information in Historical Data. *University of Wisconsin*. www.iscte.pt/~mlaf/forecastingpage.htm.

- [77] R. Fisher, L. Tippet. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of largest or smallest member of sample. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 24, str. 180–190.
- [78] P. Fiszeder. (2001). Jednorównaniowe modele GARCH - analiza procesów zachodzących na GPW w Warszawie. *Dynamiczne modele ekonometryczne*. Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń.
- [79] H. Föllmer, A. Schied. (2002). Robust preferences and convex measures of risk (preprint). *Advances in Finance and Stochastic*. Springer.
- [80] G. Forte, M. Manera. (2002). Forecasting Volatility in European Stock Markets with Non-Linear GARCH Models. *Fondazione Eni Mattei*. <http://papers.ssrn.com>.
- [81] D. French. (1984). The Weekend Effect on the Distribution of Stock Prices. Implication for Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, 13, str. 547–559.
- [82] L. Gajek, M. Kałuszka. (2000). *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [83] M. Garman, M. Klass. (1980). On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data. *Journal of Business*, 53(1), str. 67–78.
- [84] A. Göing. (1996). *Estimation in financial Models*. Department of Mathematics, ETH Zurich. <http://www.risklab.ch/ftp/papers/Estimation.pdf>.
- [85] L. Glosten, R. Jagannathan, D. Runkle. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of finance*, 48, str. 1779–1801.
- [86] C. Gouriéroux. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer Verlag, New York.
- [87] C. Granger, R. Joyeux. (1980). An introduction to long memory time series and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, str. 15–29.
- [88] M. Greene, B. Fielitz. (1977). Long-term dependence in common stock returns. *Journal of Financial Economics*, 4, str. 339–349.

- [89] J. Głuchowski. (2001). *Leksykon finansów (red.)*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [90] T. Guldiman. (1995). *RiskMetrics - Technical Document*. New York. www.riskmetrics.com.
- [91] C. Hafner, H. Herwartz. (1998). Testing for Linear Dynamics under Heteroskedasticity. Humboldt-Universität, Berlin. <http://ideas.repec.org>.
- [92] C. Hafner, H. Herwartz. (1999). Option Pricing under Linear Autoregressive Dynamics, Heteroskedasticity, and Conditional Leptokurtosis. Humboldt-Universität, Berlin. <http://ideas.repec.org>.
- [93] S. Hamid. (1998). Efficient Consolidation of Implied Volatilities and a Test of Intertemporal Averaging. *Derivatives Quarterly*, Spring, str. 35–49.
- [94] B. Hansen. (1994). Autoregressive conditional density models. *International Economic Review*, 35, str. 705–730.
- [95] R. Hansen, A. Lunde. (2001). A comparison of Volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)? *Centre for Analytical Finance, University of Aarhus*, Working Paper No. 84.
- [96] C. Harvey, A. Siddique. (1999). Autoregressive conditional skewness. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, str. 465–487.
- [97] C. Harvey, A. Siddique. (2000). Conditional Skewness in Asset Pricing Tests. *Journal of Finance*, 55, str. 1263–1295. faculty.fuqua.duke.edu/~charvey.
- [98] M. Hass. (2001). New Methods in Backtesting. Financial Engineering Research Center, Bonn.
- [99] E. Haug. (1998). *The complete guide to option pricing formulas*. McGraw-Hill.
- [100] R. Haugen. (1996). *Teoria nowoczesnego inwestowania. Obszerny podręcznik analizy portfelowej*. WIG PRESS, Warszawa.
- [101] M. Hauser. (1998). Maximum Likelihood Estimators for ARMA and ARFIMA Models: A Monte Carlo Study. ideas.repec.org/p/wpa/wuwpem/9809001.html.
- [102] Z. Hellwig. (1977). *Teoria prognozy z zastosowaniami ekonomicznymi*. Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław.

- [103] L. Hentschel. (1995). All in the family Nesting symmetric and asymmetric GARCH models. *Journal of Financial Economics*, 39, str. 71–104.
- [104] R. Heynen, A. Kemna, T. Vorst. (1994). Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29(1), str. 31–55.
- [105] B. Hill. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Ann. Statistic*, 3, str. 1163–1174.
- [106] D. Hobson. (1996). Stochastic Volatility. *University of Bath*. [http: cite-seer.nj.nec.com/hobson96stochastic.html](http://cite-seer.nj.nec.com/hobson96stochastic.html).
- [107] J. Hull. (1999). *Futures, options and other derivatives*. Prentive-Hall, New York.
- [108] J. Hull, A. White. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42, str. 281–299.
- [109] J. Hull, A. White. (1990). Valuing derivative securities using the explicit finite difference method. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, str. 87–100.
- [110] S. Hwang, J. Knight, S. Satchell. (1999). Forecasting Volatility Using LINEX Loss Function. *The FERC Working Papers*, <http://www.business.city.ac.uk/ferc/wpapers.html>.
- [111] K. Jackowicz. (1996). Ryzyko stopy procentowej a problemy teorii stóp procentowych. Próba nowej definicji i systematyka. *Bank i Kredyt*, Nr. 7-8.
- [112] K. Jajuga. (1998). *Ogólna koncepcja zarządzania ryzykiem finansowym*. Ekonometria czasu transformacji (pod red. S. Barczaka), Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice.
- [113] K. Jajuga. (1999a). Miary ryzyka rynkowego - cz. I. *Rynek Terminowy*, 4, str. 67–69.
- [114] K. Jajuga. (1999b). Nowe tendencje w zarządzaniu ryzykiem finansowym. *Rynek Terminowy*, 3.

- [115] K. Jajuga. (2000a). *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu. (pod red.).
- [116] K. Jajuga. (2000b). Miary ryzyka rynkowego - cz. II. *Rynek Terminowy*, 7, str. 115–121.
- [117] K. Jajuga. (2000c). Miary ryzyka rynkowego - cz. III. *Rynek Terminowy*, 8, str. 112–117.
- [118] K. Jajuga. (2001a). O ryzyku modelu finansowego. *Mikroekonometria w teorii i praktyce*. Uniwersytet Szczeciński., str. 49–58.
- [119] K. Jajuga. (2001b). Podstawy analizy wartości ekstremalnych na rynkach finansowych. *Rynek Terminowy*, 11, str. 123–127.
- [120] K. Jajuga, K. Kuziak, P. Markowski. (1997). *Inwestycje Finansowe*. Wydawnictwo AE we Wrocławiu.
- [121] K. Jajuga, K. Kuziak, D. Papla, P. Rokita. (2001). Ryzyko wybranych instrumentów polskiego rynku finansowego - cz.II. *Rynek Terminowy*, 11, str. 133–140.
- [122] R. Jarrow. (1998). *Volatility New Estimations Techniques for pricing Derivatives (red.)*. Risk Books, New York.
- [123] P. Jedynak, S. Szydło. (1997). *Zarządzanie ryzykiem dla menedżerów*. Wyższa Szkoła Zarządzania i Bankowości w Krakowie, Ossolineum, Wrocław.
- [124] C. Jochum. (1999). *Stock Market Volatility: Estimation and Causes*. Universitat St. Gallen.
- [125] P. Jorion. (1988). On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets. *The Review of Financial Studies*, 1(4), str. 427–445.
- [126] P. Jorion. (2001). *Value at Risk: the new benchmark for controlling market risk, 2nd edition*. McGraw-Hill.
- [127] T. Kaczmarek. (1999). *Zarządzanie ryzykiem handlowym i finansowym dla praktyków*. ODDK, Gdańsk.

- [128] I. Kamińska-Szmaj, M. Jarosz. (2001). *Słownik Wyrazów Obcych (red.)*. Europa, Warszawa.
- [129] K. Keedijk, F. Nissen, P. Schotman, C. Wolff. (1997). The Dynamics of Short-Term Interest Rate Volatility Reconsidered. *European Finance Review*, 1, str. 105–130.
- [130] E. Këllezi, M. Gilli. (2000). Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures. *Computational Finance 2000*. London, Business School.
- [131] F. Knight. (1921). *Risk, Uncertainty and Profit*. University of Boston, Boston.
- [132] J. Knight, S. Satchell. (1998). *Forecasting volatility in the financial markets*. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [133] S. Kon. (1984). Models of Stock Returns - A Comparison. *Journal of Finance*, 39, str. 147–165.
- [134] I. Konarzewska. (1998). Badania stabilności w czasie rozkładów stóp zwrotu z inwestycji w akcje - studium empiryczne dla GPW. w: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice*, str. 213–224.
- [135] I. Konarzewska. (2000). Problemy modelowania i prognozowania wartości instrumentów rynku kapitałowego. w: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice*, str. 95–121.
- [136] S. Kou. (1999). A Jump Diffusion Model for Option Pricing with Three Properties: Leptokurtic Feature, Volatility Smile, and Analytical Tractability. *Columbia University*. www.ieor.columbia.edu/~kou.
- [137] A. Kraus, R. Litzenberg. (1976). Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *Journal of Finance*, 31, str. 1085–1100.
- [138] T. Kulawczuk. (1987). *Metody prognozowania ekonometrycznego*. Uniwersytet Gdański, Gdańsk.
- [139] P. Lambert, S. Laurent. (2001). Modeling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions. <http://www.egss.ulg.ac.be/econometrie/pdf>

- [140] P. Lambert, S. Laurent. (2001). Modelling financial time series using GARCH-type models with a skewed Student distribution for the innovations. <http://www.egss.ulg.ac.be/econometrie/pdf%5CSKST.pdf>.
- [141] H. Latane, R. Rendleman. (1976). Standard deviations of stock price ratios implied in option prices. *The Journal of Finance*, XXXI(2), str. 369–381.
- [142] A. Lo, J. Wang. (1995). Implementing option pricing models when asset returns are predictable. *Journal of Finance*, 50, str. 87–129.
- [143] J. Lopez. (1999). Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models. *Federal Reserve Bank of San Francisco*. www.frbsf.org/econrsrch/workingp/wpj199-01a.pdf.
- [144] S. Manaster, G. Koehler. (1982). The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model. *Journal of Finance*, 37(1), str. 227–230.
- [145] B. Mandelbrot. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, 36, str. 394–419.
- [146] B. Mandelbrot, J. van Ness. (1968). Fractional Brownian Motion, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10, str. 422–437.
- [147] D. Mc Manus, D. Watt. (1999). Estimating One-Factor Models of Short-Term Interest Rates. *Bank of Canada Working Paper 99-18*.
- [148] H. Markowitz. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7, str. 77–91.
- [149] H. Markowitz. (1959). *Portfolio selection - efficient diversification of investments*. Yale University Press, New Haven.
- [150] H. Markowitz. (1991). *Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments*. Basil Blackwell, Oxford.
- [151] A. McNeil. (1999). Extreme Value Theory for Risk Managers. *Departement Mathematik, ETH Zentrum, Zurich*. www.math.ethz.ch/~mneil/ftp/cad.pdf.
- [152] A. McNeil, R. Frey. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroskedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, 7, str. 271–300. <http://www.math.ethz.ch/mneil/ftp/olddynamic.pdf>.

- [153] R. Merton. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, str. 141–183.
- [154] R. C. Merton. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29, str. 449–470.
- [155] P-Y. Moix. (2001). *The Measurement of Market Risk*. Springer. Berlin.
- [156] M. Musiela, M. Rutkowski. (1998). *Martingale methods in financial modelling*. Springer Verlag, Berlin.
- [157] S. Natenberg. (1994). *Option, volatility and pricing*. Probus Publishing Company, Chicago.
- [158] S. Neftci. (1996). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press, New York.
- [159] D. Nelson. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59(2), str. 347–370.
- [160] J. Nolan. (1997). Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Function. *Commun. Statist.-Stochastic Models*, 13(4), str. 759–774.
- [161] R. Officer. (1972). The distributions of stock returns. *Journal of the American Statistical Association*, 67, str. 807–812.
- [162] B. Olzacka, R. Pałczyńska-Gościński. (1998). *Leksykon zarządzania finansami*. ODDK, Gdańsk.
- [163] S. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka. (1997). *Statystyka. Elementy teorii i zadania*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- [164] A. Pagan, G. Schwert. (1990). Alternative models for conditional stock volatility. *Journal of Econometrics*, 45, str. 267–290.
- [165] A. Pajor. (2001). Modele stochastycznej zmienności: Estymacja metodą quasi-największej wiarygodności. *Przegląd Statystyczny*, 3-4, str. 323–344.
- [166] N. Parkinson. (1980). The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. *Journal of Business*, 53(1), str. 61–65.
- [167] Z. Pawłowski. (1978). *Ekonometria*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

- [168] I. Pena, G. Rubio, G. Serna. (1999). Why do we smile? On the determinants of the implied volatility function. *Journal of Banking and Finance*, 23, str. 1151–1179.
- [169] P. Penza, V. Bansal. (2001). *Measuring Market Risk with Value at Risk*. Wiley & Sons.
- [170] E. Peters. (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets*. Wiley & Sons, New York.
- [171] J-P. Peters. (2001). Estimating and forecasting volatility of stock indices using asymmetric GARCH models and (Skewed) Student-t densities. *EAA Business School, University of Liege, Belgium*. <http://www.eaa.egss.ulg.ac.be/rogp/peters/papers.html>.
- [172] I. Pfeffer. (1956). *Insurance and Economic Theory*. Irwin Inc., Homewood, Illinois.
- [173] J. Pickands. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statistics*, 7, str. 119–131.
- [174] K. Piontek. (2000). Efekt dni tygodnia i jego wpływ na wycenę opcji. *Ogólnopolska Konferencja Katedr Finansowych „Finanse, Banki i Ubezpieczenia w Polsce u progu XXI wieku”*, Materiały Konferencyjne, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Tom IV, str. 135–147.
- [175] K. Piontek. (2000). Heteroskedastyczność szeregów stóp zwrotu a koncepcja pomiaru ryzyka metodą VaR. w: *T. Trzaskalik, Modelowanie preferencja a ryzyko, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice*, str. 339–350.
- [176] K. Piontek. (2002). Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR-GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z „grubymi ogonami”. w: *W. Tarczyński (red), Rynek kapitałowy - Skuteczne inwestowanie, tom II, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin*.
- [177] M. Pipień, J. Osiewalski. (1999). Bayesowskie wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH(1,1). *Dynamiczne modele ekonometryczne, UMK, Toruń*, str. 23–34.
- [178] S. Poon, C. Granger. (2001). Forecasting Financial Market Volatility - A Review. <http://homepages.strath.ac.uk/ias00108/>.

- [179] K. Prause. (1997). Modelling financial data using generalized hyperbolic distributions. *FDM Preprint 48, University of Freiburg*. cite-seer.nj.nec.com/prause97modelling.html.
- [180] S. Press. (1968). A compound events model for security prices. *Journal of Business*, 41, str. 317–35.
- [181] D. Rae. (1997). Forecasting Volatility. *The National Bank of New Zealand. Financial Research Paper No. 9*.
- [182] A. Rejman. (1997). *Modelowanie stochastyczne i symulacje rynku papierów wartościowych przy wykorzystaniu procesów α -stabilnych*. Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławska. (praca doktorska).
- [183] R. Rendleman, B. Bartter. (1980). The Pricing of Options on Debt securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, str. 11–24.
- [184] RiskMetrics. (1995). Modelling, estimating, forecasting and comparing monthly volatility: A comparative study. *RiskMetrics Monitor*, Fourth quarter, str. 4–16.
- [185] P. Rokita. (1999). Wykorzystanie teorii wartości ekstremalnych a analizie ryzyka rynkowego warrantów opcyjnych na rynku polskim. w: K. Jajuga, W. Ronka-Chmielowiec (red.), *Inwestycje Finansowe i Ubezpieczenia*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław.
- [186] P. Rokita. (2002). Expected Shortfall jako uzupełnienie koncepcji wartości zagrożonej na przykładzie ryzyka inwestycji w opcje. w: W. Tarczyński (red.), *Rynek Kapitałowy - Skuteczne Inwestowanie, tom. II, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin*, str. 507–520.
- [187] W. Ronka-Chmielowiec. (2000). *Zarządzanie ryzykiem w ubezpieczeniach (pod red.)*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław.
- [188] J. Rosenberg. (2000). Implied Volatility Functions: a Reprise. *The Journal of Derivatives*, SPRING, str. 51–64.
- [189] M. Rubinstein. (1994). Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, LXIX(3), str. 771–817.
- [190] J. Sacała. (1992). *Rozkłady stabilne w statystyce i ekonomii (praca doktorska)*. Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu.

- [191] R. Schmalensee, R. Trippi. (1978). Common stock volatility expectations implied by option premia. *The Journal of Finance*, XXXIII(1), str. 129–147.
- [192] C. Schmidt, R. Tchering. (1994). The Identification of Fractional ARIMA Models. <http://ideas.repec.org/p/wop/humbsf/1995-8.html>.
- [193] Ch. Schmitt. (1996). Option Pricing Using EGARCH Models. *ZEW Discussion Paper No. 96-20*. Mannheim.
- [194] W. Schwert. (1989). Why Does Stock Market Volatility Change Over Time? *Journal of Finance*, XLIV(5), str. 1115–1153. <http://schwert.ssb.rochester.edu/afa.htm>.
- [195] T. Söderström, P. Stoica. (1997). *Identyfikacja systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- [196] J. Singleton, J. Wingender. (1986). Skewness Persistence in Common Stock Returns. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, str. 335–341.
- [197] E. Smaga. (1999). *Arytmetyka finansowa*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków.
- [198] K. Sobczyk. (1996). *Stochastyczne równania różniczkowe*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- [199] M. Szymczak. (1988). *Słownik języka polskiego*. Wydawnictwo PWN, Warszawa (red.).
- [200] M. Taqqu, V. Teverovsky, W. Willinger. (1995). Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*, 3, str. 785–788.
- [201] W. Tarczyński, M. Mojsiewicz. (2001). *Zarządzanie ryzykiem*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- [202] W. Tarczyński, M. Zwolankowski. (1999). *Inżynieria finansowa. Instrumentarium, Strategie, Zarządzanie Ryzykiem*. Placet, Warszawa.
- [203] G. Tauchen. (2001). Notes on Financial Econometrics. *Journal of Econometrics*, 100, str. 77–64.
- [204] S. Taylor. (1986). *Modelling Financial Times Series*. Wiley & Sons, New York.

- [205] R. Tsay. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. Wiley & Sons, Chicago.
- [206] D. Uyemura, D. Van Deventer. (1997). *Zarządzanie ryzykiem finansowym w bankach : teoria i praktyka zarządzania aktywami i pasywami*. ZBP, Warszawa.
- [207] O. Vasicek. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, str. 177–188.
- [208] A. Weron, R. Weron. (1998). *Inżynieria finansowa*. WNT, Warszawa.
- [209] R. Weron. (1995). Performance of the estimators of stable law parameters. <http://www.im.pwr.wroc.pl/hugo/publ/am-95.ps>.
- [210] R. Whaley. (1982). Valuation of American call options on dividend-paying stocks. *Journal of Financial Economics*, 10, str. 127–150.
- [211] A. Willet. (1951). *The Economic Theory of Risk and Insurance*. University of Pennsylvania Press, Philadelphia.
- [212] P. Wilmott. (1999). *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*. Wiley & Sons, Chichester.
- [213] A. Wojtasiak. (2002). *Ryzyko inwestowania w finansowe instrumenty pochodne*. Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław. (praca doktorska).
- [214] J. Yu. (2002). Forecasting volatility in the New Zealand stock market. *Applied Financial Economics*, 12, str. 193–202.
- [215] J. Zakoian. (1990). Threshold heteroskedastic models. *nieopublikowana praca CREST, INSEE*.
- [216] P. Zangari. (1996). When is non-normality a problem? The case of 15 times series from emerging markets. *RiskMetrics Monitor*, forth quarter, str. 20–32. www.riskmetrics.com.
- [217] Z. Zawadzka. (1999). *Zarządzanie ryzykiem w banku komercyjnym*. Wydawnictwo SGH, Warszawa.
- [218] Z. Zawadzka. (2001). Ryzyko bankowe. *Bank*, 6, str. 52–57.

Spis rysunków

2.1	Trajektorie standardowego procesu Browna	56
2.2	Trajektorie arytmetycznego ruchu Browna	61
2.3	Trajektorie geometrycznego ruchu Browna	62
2.4	Trajektorie procesu z powrotem do średniej.	65
2.5	Aproksymacja procesu geometrycznego ruchu Browna.	71
2.6	Histogram dziennych stóp zwrotu	80
2.7	Wykres kwantyl-kwantyl	80
2.8	Przykładowe rozkłady t-Studenta (skala liniowa)	82
2.9	Przykładowe rozkłady t-Studenta (skala logarytmiczna)	82
2.10	Przykładowe rozkłady GED (skala liniowa)	84
2.11	Przykładowe rozkłady GED (skala logarytmiczna)	84
2.12	Przykładowy, standaryzowany, skośny rozkład t-Studenta	90
2.13	Przykładowe symetryczne rozkłady α -stabilne (skala liniowa)	94
2.14	Przykładowe symetryczne rozkłady α -stabilne (skala logarytmiczna)	94
2.15	Przykładowe asymetryczne rozkłady α -stabilne (skala liniowa)	95
2.16	Symetryczna mieszanka rozkładów normalnych	104
2.17	Skośna mieszanka rozkładów normalnych	104
2.18	Empiryczna funkcja autokorelacji dla indeksu WIG	113
2.19	Empiryczna funkcja autokorelacji procesu ARIMA(0,1,0)	119
2.20	Efekt skupiania zmienności.	124
2.21	Efekt autokorelacji kwadratów stóp zwrotu.	124
2.22	Przykład realizacji procesu $GARCH(1,1)$	134
2.23	Grube ogony realizacji procesu $GARCH(1,1)$	135
2.24	Autokorelacje kwadratów stóp zwrotu realizacji procesu $GARCH(1,1)$	135
2.25	Efekt braku autokorelacji stóp zwrotu realizacji procesu $GARCH(1,1)$	135
2.26	Przykładowe funkcje wpływu informacji dla modelu NARCH	137
2.27	Przykładowe funkcje wpływu informacji dla modelu GJR-GARCH	140

2.28	Przykładowa funkcja wpływu informacji dla modelu <i>EGARCH</i>	143
2.29	Zmiany poziomu stóp procentowych WIBOR1m i WIBID1m	159
4.1	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (indeks WIG)	210
4.2	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu t-Studenta (indeks WIG)	210
4.3	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu GED (indeks WIG)	210
4.4	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (ceny miedzi)	214
4.5	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu t-Studenta (ceny miedzi)	214
4.6	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu GED (ceny miedzi)	214
4.7	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (kurs dolara)	218
4.8	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu t-Studenta (kurs dolara)	218
4.9	Wykres kwantyl-kwantyl dla rozkładu GED (kurs dolara)	219
4.10	Przekroczenia <i>VaR</i> dla modeli zawierających się w modelu <i>AR(1)-GARCH(1,1)</i>	233
4.11	Płaszczyzna zmienności dla modelu <i>AR(1)-GJR-GARCH(1,1)</i>	243
4.12	Struktury czasowe zmienności dla modelu <i>AR(1)-GJR-GARCH(1,1)</i>	243

Spis tabel

2.1	Modele czasu ciągłego	58
2.2	Zestawienie cech rozkładów	108
2.3	Zestawienie cech modeli warunkowej wartości oczekiwanej	122
2.4	Zestawienie cech deterministycznych modeli warunkowej wariancji . .	147
2.5	Przykładowe modele natychmiastowej stopy procentowej	158
3.1	Czasy połowicznego powrotu dla modelu $GARCH(1,1)$	180
3.2	Porównanie estymatorów zmienności łącznej.	196
4.1	Oceny parametrów modeli dla indeksu WIG - rozkład normalny . . .	208
4.2	Oceny parametrów modeli dla indeksu WIG - rozkład GED i t-Stud .	209
4.3	Statystyki K i AD dla indeksu WIG	209
4.4	Oceny parametrów modeli dla cen miedzi - rozkład normalny	212
4.5	Oceny parametrów modeli dla cen miedzi - rozkład GED i t-Stud . .	213
4.6	Statystyki K i AD dla cen miedzi	213
4.7	Oceny parametrów modeli dla kursu dolara - rozkład normalny	216
4.8	Oceny parametrów modeli dla kursu dolara - rozkład GED i t-Stud .	217
4.9	Statystyki K i AD dla kursu dolara	218
4.10	Oceny prognoz zmienności indeksu WIG	224
4.11	Oceny prognoz zmienności kursu dolara	225
4.12	Oceny prognoz zmienności cen miedzi	226
4.13	Błędy prognoz zmienności implikowanej dla horyzontu 1 miesiąca . .	229
4.14	Błędy prognoz zmienności implikowanej dla horyzontu 3 miesięcy . .	229
4.15	Zmienności implikowane dla poszczególnych warrantów (prognoza na dzień 01-06-2001)	230
4.16	Wartości zmienności implikowanych i zrealizowanych dla horyzontu 1 i 3 miesięcy.	230
4.17	Wyniki testów wstecznych modeli VaR	234

4.18 Liczba przekroczeń VaR w modelach z warunkowym rozkładem normalnym, GED i t-Studenta	236
4.19 Parametry modelu dla indeksu WIG względem miary P	242
4.20 Wartości opcji kupna na jednostkę indeksu WIG dla modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)	245
4.21 Płaszczyzna zmienności implikowanej dla wartości opcji z modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1)	245